Учебные пособия АНО «Издательский дом «Народное образование»
допущены к использованию в общеобразовательных учреждениях
Приказом Минобрнауки России № 16 от 16.01.2012

Д.А. Мальцев,
А.А. Мальцев,
Л.И. Мальцева

МАТЕМАТИКА

Подготовка к ЕГЭ 2018

Профильный уровень

Решебник

Издатель Мальцев Д.А.
Ростов-на-Дону

Народное образование
Москва
2018

Содержание

От авторов

В данном пособии приведены полные решения заданий с развёрнутым ответом для всех тестов с нечётными номерами (т.е. решения тестов №1, №3, №5 и т.д.), а также решения всех заданий с нечётными номерами из Задачника книги «Математика. Подготовка к ЕГЭ 2018. Профильный уровень». Кроме того, в Решебнике даны указания к решениям задач №16 (планиметрия) и №19 (олимпиадная тематика) тестов с чётными номерами. Все решения написаны достаточно подробно, в стиле беседы с читателем.

Отметим, что хотя на экзамене при оформлении решений требуется меньшая степень подробности, чем выбрана авторами, Вы можете «взять на вооружение» и с успехом использовать некоторые из приёмов и стиль оформления решений, которые использованы в данной книге. Например, ключевые слова и фразы, наподобие «следовательно», «значит», «таким образом», «так как ..., то...», помогут Вам более упорядоченно излагать свои мысли. И вполне возможно, что вследствие этого Вы станете совершать меньшее количество ошибок и быстрее приходить к правильному ответу.

Данное пособие поможет ученикам приобрести устойчивые навыки в решении ряда заданий и существенно повысить уровень математической культуры. Это, в свою очередь, будет способствовать не только успешной сдаче последующих экзаменов, но также окажет неоценимую помощь в дальнейшем обучении — вне зависимости от выбранного ВУЗа и выбранной специальности.

Желаем Вам успеха!

Авторы благодарят рецензентов за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

Глава I

Решения к тестам

Десять страниц математики понятой лучше ста страниц, заученных на память, а одна страница, самостоятельно проработанная, лучше десяти страниц, понятых отчётливо, но пассивно.

Д. Юнг

Тест №5

13. а) Решите уравнение $\dfrac{10\cos^2 x+\cos x-2}{\sqrt{-\sin x}}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Решение.

а) $\dfrac{10\cos^2 x+\cos x-2}{\sqrt{-\sin x}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}10\cos^2 x+\cos x-2=0\\ -\sin x>0\end{cases} \quad (*).$

Квадратное уравнение $10t^2+t-2=0$ имеет корни $t=-\dfrac{1}{2}$ и $t=\dfrac{2}{5}$. Поэтому система $(*)$ равносильна совокупности двух систем:

$$1)\ \begin{cases}\cos x=-\dfrac{1}{2}\\ \sin x<0\end{cases} \quad \text{и} \quad 2)\ \begin{cases}\cos x=\dfrac{2}{5}\\ \sin x<0.\end{cases}$$

Корнями уравнения $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ являются $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$, где $n\in Z$; корнями уравнения $\cos x=\dfrac{2}{5}$ являются $x=\pm\arccos\dfrac{2}{5}+2\pi n$, где $n\in Z$. Условию $\sin x<0$ удовлетворяют точки, лежащие в 3-ей и 4-ой четвертях тригонометрического круга. Поэтому решением системы 1) являются $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$, а решением системы 2) являются $x=-\arccos\dfrac{2}{5}+2\pi n$, где $n\in Z$.

б) $-\pi<-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n<\dfrac{3\pi}{2},\ n\in Z \Leftrightarrow -1+\dfrac{2}{3}<2n<\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{3},\ n\in Z \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -\dfrac{1}{6}<n<\dfrac{13}{12},\ n\in Z \Leftrightarrow n=0$ или $n=1$. Таким образом, среди точек $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$ промежутку $\left(-\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$ принадлежат точки $x=-\dfrac{2\pi}{3}$ и $x=\dfrac{4\pi}{3}$, соответствующие значениям $n=0$ и $n=1$.

Чтобы определить, какие из точек $x = -\arccos\frac{2}{5} + 2\pi n$, $n \in Z$ входят в промежуток $\left(-\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, заметим, что $0 < \arccos\frac{2}{5} < \frac{\pi}{2}$. Поэтому из неравенств $-\pi < -\arccos\frac{2}{5} + 2\pi n < \frac{3\pi}{2}$ следует, что $-\pi < 2\pi n < 2\pi$, $-\frac{1}{2} < n < 1$, $n = 0$. При $n = 0$ имеем: $x = -\arccos\frac{2}{5}$ — эта точка входит в промежуток $\left(-\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Ответ: а) $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, x = -\arccos\frac{2}{5} + 2\pi n, n \in Z$

б) $-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, -\arccos\frac{2}{5}$

14. Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, в котором $BC = 2AB$. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Отрезок SO является высотой пирамиды $SABCD$. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB.

а) Докажите, что $BP : PQ = 1 : 3$.

б) Найдите двугранный угол пирамиды при ребре SB, если $SB = BC$.

Решение.

а) Так как диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам, а отрезок SO — высота пирамиды, см. рис. 1, то $SA = SB = SC = SD$ (прямоугольные треугольники ASO и BSO равны по двум катетам, откуда $SA = SB$, равенство других пар отрезков устанавливается аналогично).

рис. 1

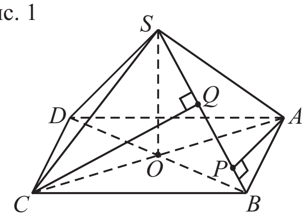
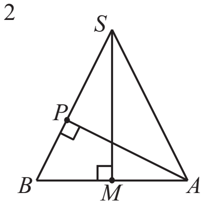


рис. 2



Рассмотрим равнобедренный треугольник SAB. Пусть M — середина стороны AB, тогда SM — медиана, а значит и высота к основанию этого треугольника, см. рис. 2. Из прямоугольных треугольников SBM и ABP имеем: $\frac{BM}{BS} = \cos\angle B$, $\frac{BP}{AB} = \cos\angle B$. Значит, $\frac{BM}{BS} = \frac{BP}{AB}$. Из этого

равенства получаем, что $BP = \frac{BM}{BS} \cdot AB = \frac{AB/2}{BS} \cdot AB = \frac{AB^2}{2BS}$.

Абсолютно аналогично, рассматривая грань SBC, получаем, что $BQ = \frac{BC^2}{2BS}$.

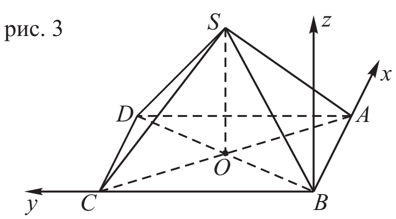
Из равенств $BP = \frac{AB^2}{2BS}$ и $BQ = \frac{BC^2}{2BS}$ следует, что $\frac{BP}{BQ} = \frac{AB^2}{BC^2}$.

А так как по условию $AB = \frac{1}{2}BC$, то $\frac{BP}{BQ} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Поэтому $BQ = 4BP$, $PQ = BQ - BP = 3BP$ и, значит, $BP : PQ = 1 : 3$, что и требовалось доказать.

б) Для решения данной задачи применим координатный метод. В тексте решения приводятся все определения и факты, необходимые для его понимания. При этом все вспомогательные сведения (которые при написании решения на экзамене, конечно же, писать не нужно) выделены курсивом.

1) Пусть $\overline{n}$ — некоторый вектор, перпендикулярный плоскости, содержащей грань ABS, а $\overline{m}$ — некоторый вектор, перпендикулярный плоскости, содержащей грань CBS. Тогда искомый двугранный угол φ пирамиды при ребре BS либо равен углу между векторами $\overline{n}$ и $\overline{m}$, либо дополняет его до $180°$. Поэтому модуль косинуса угла φ можно найти из формулы: $|\cos\varphi| = \frac{|(\overline{n}, \overline{m})|}{|\overline{n}| \cdot |\overline{m}|}$, где $|(\overline{n}, \overline{m})|$ — модуль скалярного произведения векторов $\overline{n}$ и $\overline{m}$, а $|\overline{n}|, |\overline{m}|$ — длины этих векторов. (*Напомним, что скалярное произведение векторов $\overline{n}$ и $\overline{m}$ вычисляется по формуле: $(\overline{n}, \overline{m}) = |\overline{n}| \cdot |\overline{m}| \cdot \cos\alpha$, где α — угол между векторами $\overline{n}$ и $\overline{m}$. А поскольку для искомого угла φ выполняется одно из двух: либо $\varphi = \alpha$, либо $\varphi = \pi - \alpha$, то $|\cos\varphi| = |\cos\alpha|$.*)

рис. 3



Пусть $AB = 2$, тогда $BS = BC = 4$. Введём систему координат так, как показано на рисунке 3: начало координат в точке B, оси Bx и By направлены вдоль лучей BA и BC, ось Bz направлена перпендикулярно плоскости ABC. Тогда координаты точки B — $(0; 0; 0)$, точки A — $(2; 0; 0)$, точки $C - (0;4;0)$, точки $O - (1;2;0)$, а точки $S - (1;2;h)$, где $h-$ длина высоты SO. Вычислим $h: BO^2 = 1^2 + 2^2 = 5,\ SO^2 = BS^2 - BO^2 = = 4^2 - 5 = 11,\ h = SO = \sqrt{11}$.

Составим уравнение плоскости, проходящей через точки B, A, S. Для этого в общий вид уравнения плоскости $ax+by+cz+d=0$ подставим поочерёдно координаты этих точек. Подставляя координаты точки $B(0;0;0)$, получаем, что $d=0$. Подставляя в уравнение $ax+by+cz=0$ координаты точки $A(2;0;0)$, получаем, что $a=0$. То есть уравнение плоскости BAS имеет вид: $by+cz=0$. Заметим, что $b\neq 0$: если $b=0$, то из уравнения $cz=0$ следует, что либо $c=0$, либо $z=0$. Но $c\neq 0$, так как уравнение $0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=0$ не определяет плоскость (этому уравнению удовлетворяют любые x,y,z), а уравнение $z=0$ задаёт точки, лежащие в плоскости ABC, которая отлична от плоскости BAS.

Так как $b\neq 0$, то b можно взять произвольно *(коэффициенты уравнения плоскости определены с точностью до произвольного множителя, поэтому убедившись, что некоторый из коэффициентов не равен нулю, его можно взять равным любому числу, при этом остальные коэффициенты уравнения плоскости будут определены уже однозначно)*. Полагая $b=1$ и подставляя в уравнение $y+cz=0$ координаты точки S ($y=2,\ z=\sqrt{11}$), получаем: $2+c\sqrt{11}=0$, откуда $c=-\dfrac{2}{\sqrt{11}}$. Умножая коэффициенты $a=0,\ b=1,\ c=-\dfrac{2}{\sqrt{11}}$ на $\sqrt{11}$, получаем, что в определённой нами системе координат уравнение плоскости BAS имеет вид: $\sqrt{11}y-2z=0$. Согласно известному факту, отсюда следует, что вектор $\overline{n}=\overrightarrow{(0;\sqrt{11};-2)}$ перпендикулярен плоскости BAS.

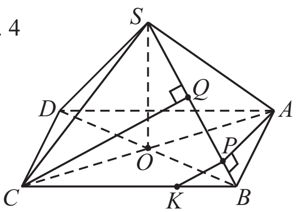
Аналогично составим уравнение плоскости BCS, подставляя в уравнение плоскости $ax+by+cz+d=0$ поочерёдно координаты точек B, C и S. Подставляя координаты точки $B\,(0;0;0)$, получаем, что $d=0$. Подставляя координаты точки $C\,(0;4;0)$, в уравнение $ax+by+cz=0$, получаем, что $b=0$. Так как плоскость BCS отлична от плоскости ABC, то в её уравнении $ax+cz=0$ коэффициент a не равен нулю. Полагая $a=1$ и подставляя в уравнение $x+cz=0$ координаты точки S ($x=1$, $z=\sqrt{11}$), получаем: $1+c\sqrt{11}=0$, откуда $c=-\dfrac{1}{\sqrt{11}}$. Умножая коэффициенты $a=1,\ b=0,\ c=-\dfrac{1}{\sqrt{11}}$ на $\sqrt{11}$, получаем, что уравнение плоскости BCS имеет вид: $\sqrt{11}x-z=0$. Поэтому вектор $\overline{m}=\overrightarrow{(\sqrt{11};0;-1)}$ перпендикулярен плоскости BCS.

Определив векторы нормалей $\overline{n}$ и $\overline{m}$ так, как указано выше, проведём вычисления: $|\overline{n}|=\sqrt{0+11+4}=\sqrt{15}$; $|\overline{m}|=\sqrt{11+0+1}=\sqrt{12}$, $(\overline{n},\overline{m})=0\cdot\sqrt{11}+\sqrt{11}\cdot 0+(-2)\cdot(-1)=2$ *(напомним, что скалярное произведение векторов $\overrightarrow{(x_1;y_1;z_1)}$ и $\overrightarrow{(x_2;y_2;z_2)}$ равно сумме произведений их соответствующих координат: $x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$)*.

Отсюда получаем, что $|\cos\varphi|=\dfrac{|(\overline{n},\overline{m})|}{|\overline{n}|\cdot|\overline{m}|}=\dfrac{2}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{12}}=\dfrac{1}{3\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{15}$.

Нам остаётся лишь определить знак $\cos\varphi$. Покажем, что $\cos\varphi<0$. Для этого в плоскости BSC восстановим перпендикуляр из точки P к прямой BS и точку пересечения этого перпендикуляра с ребром BC обозначим через K, см. рисунок 4. Так как $AP\perp BS$ и $PK\perp BS$, то $\angle APK-$ это линейный угол двугранного угла при ребре SB, т.е. $\varphi=\angle APK$. По теореме косинусов из $\triangle APK$ имеем: $\cos\varphi=\dfrac{AP^2+KP^2-AK^2}{2AP\cdot PK}$.

рис. 4



Остаётся лишь заметить, что поскольку $AK^2=AB^2+BK^2$ и $AB>AP$, $BK>KP$, то $AK^2>AP^2+KP^2$, и, значит, $\cos\varphi<0$.

Таким образом, $\cos\varphi=-\dfrac{\sqrt{5}}{15}$, поэтому $\varphi=\pi-\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{15}$.

Ответ: $\pi-\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{15}$

Примечание 1. В самой концовке решения (при доказательстве того, что $\cos\varphi<0$) намечен другой способ вычисления угла φ. Достаточно вычислить длины отрезков AK, AP, PK и выразить $\cos\varphi$ по теореме косинусов из $\triangle APK$, как это и было сделано. Длина отрезка AK была вычислена по теореме Пифагора из $\triangle ABK$. Длину отрезка AP несложно найти, выразив двумя способами площадь $\triangle ABS$: $2S_{ABS}=AB\cdot SM=BS\cdot AP$, откуда $AP=\dfrac{AB\cdot SM}{BS}$ (напомним, что через SM мы обозначали высоту $\triangle ABS$). Отрезок PK в силу подобия треугольников BKP и BCQ с коэффициентом $\dfrac{1}{4}$ (это доказано в пункте а), равен $\dfrac{CQ}{4}$. А длина отрезка CQ вычисляется как высота треугольника BCS, аналогично тому, как вычисляется длина отрезка AP.

Примечание 2. Координатный метод является универсальным — его можно применить к любой задаче, в которой требуется найти угол между плоскостями или угол между прямой и плоскостью. Однако для большинства «школьных» задач «чисто геометрический» способ решения оказывается предпочтительнее, чем координатный метод (короче запись, меньше вычислений).

Примечание 3. Несмотря на то, что для большинства «школьных» задач «чисто геометрический» метод более предпочтителен, всё же настоятельно рекомендуем Вам ознакомиться с координатным методом по какому-либо учебнику (см., например, [1] в списке литературы). Во-первых, как выясняется, на ЕГЭ могут встретиться и такие задачи, для которых «чисто геометрическое» решение крайне затруднительно (см. задачу 14 теста № 49, похожая на неё задача была на экзамене несколько лет назад). А во-вторых, хорошее знакомство с координатным методом облегчит обучение на 1-ом курсе в ВУЗе, поскольку практически на любом факультете любого ВУЗа первокурсники изучают данный метод.

15. Найдите все целые значения x, удовлетворяющие неравенству:

$$\log_{\sqrt{3}}\log_{\sqrt{2}}(x-\log_5 6)<4.$$

Решение.

1) Областью определения данного в условии неравенства являются те значения x, при которых выражение $\log_{\sqrt{2}}(x-\log_5 6)$ положительно. Так как $\sqrt{3}>1$, то $\log_{\sqrt{3}}\log_{\sqrt{2}}(x-\log_5 6)<4 \Leftrightarrow 0<\log_{\sqrt{2}}(x-\log_5 6)<\left(\sqrt{3}\right)^4$. А поскольку $\left(\sqrt{3}\right)^4=9$ и $\sqrt{2}>1$, то данное в условии неравенство равносильно неравенствам:

$$1<x-\log_5 6<\left(\sqrt{2}\right)^9 \;\Leftrightarrow\; 1+\log_5 6<x<\left(\sqrt{2}\right)^9+\log_5 6.$$

Следовательно, решением данного в условии неравенства являются $x\in(1+\log_5 6;16\sqrt{2}+\log_5 6)$.

2) Так как $2<1+\log_5 6<3$, то наименьшим целым значением x, удовлетворяющим данному в условии неравенству, является $x=3$.

В силу неравенств $\sqrt{2}>1{,}4$ и $\log_5 6>1$ имеем: $16\sqrt{2}+\log_5 6>16\cdot 1{,}4+1=23{,}4>23$. Отсюда следует, что значение $x=23$ входит в промежуток $(1+\log_5 6;16\sqrt{2}+\log_5 6)$. Покажем, что $16\sqrt{2}+\log_5 6<24$, отсюда будет следовать, что $x=23$ — наибольшее целое значение, входящее в промежуток $(1+\log_5 6;16\sqrt{2}+\log_5 6)$.

Для доказательства требуемого неравенства заметим, что

$$\log_5 6<1{,}2 \;\Leftrightarrow\; 6^5<5^6 \text{ — верное неравенство и}$$
$$\sqrt{2}<1{,}42 \;\Leftrightarrow\; 2<1{,}42^2 \text{ — верное неравенство.}$$

Из этих неравенств следует, что $16\sqrt{2}+\log_5 6<16\cdot 1{,}42+1{,}2=23{,}92<24$, ч.т.д.

Таким образом, все целые значения x, удовлетворяющие данному в условии неравенству, это все целые числа из отрезка $[3;23]$.

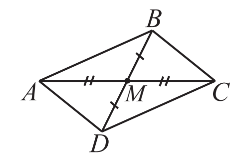
Ответ: $3\leqslant x\leqslant 23,\ x\in Z$

16. Отрезок BM — медиана треугольника ABC.

а) Докажите, что $BM<\frac{1}{2}\left(AB+BC\right)$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $AB=17$, $BC=9$, $BM=5$.

Решение.



а) Отложим на луче BM от точки M отрезок MD, равный отрезку BM, см. рисунок.

Четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом (т.к. его диагонали делятся точкой пополам). Поэтому $CD=AB$. По неравенству треугольника, применённому к $\triangle BDC$, имеем: $BD<BC+CD$. А поскольку $BD=2BM$ и $CD=AB$, то предыдущее неравенство преобразуется следующим образом:

$2BM<BC+AB$, $BM<\frac{1}{2}\left(AB+BC\right)$, ч.т.д.

б) Поскольку $ABCD$ — параллелограмм, то площади треугольников ABC и ABD равны: у этих треугольников общая сторона AB, а высоты обоих треугольников, проведённые к стороне AB, равны h, где h — расстояние между параллельными прямыми AB и CD. Поэтому искомая величина равна площади треугольника ABD.

Площадь $\triangle ABD$ найдём по формуле Герона. Так как $AB=17$, $BD=2BM=10$, $AD=BC=9$, то полагая в формуле Герона $a=17$, $b=10$, $c=9$, получаем: $p=\dfrac{a+b+c}{2}=18$, $p-a=1$, $p-b=8$, $p-c=9$, $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{18\cdot 8\cdot 9}=\sqrt{18\cdot 4\cdot 18}=18\cdot 2=36$.

Ответ: 36

17. В ноябре 2017 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S тыс. рублей, где S — натуральное число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 22% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по октябрь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в ноябре каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Ноябрь 2017	Ноябрь 2018	Ноябрь 2019	Ноябрь 2020
Долг (в тыс. рублей)	S	0,7 S	0,5 S	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

Решение.

Долг перед банком (в тыс. рублей) на ноябрь каждого года должен уменьшаться до нуля следующим образом: S; $0{,}7S$; $0{,}5S$; 0. По условию, в январе каждого года долг увеличивается на 22%, значит, долг в январе каждого года равен: $1{,}22S$; $0{,}854S$; $0{,}61S$. Следовательно, выплаты с февраля по октябрь каждого года составляют: $0{,}52S$; $0{,}354S$; $0{,}61S$. По условию, эти числа должны быть целыми. Преобразуем числа $0{,}52$, $0{,}354$ и $0{,}61$ в обыкновенные несократимые дроби: $0{,}52 = \frac{52}{100} = \frac{13}{25}$; $0{,}354 = \frac{354}{1000} = \frac{177}{500}$; $0{,}61 = \frac{61}{100}$. Числа $\frac{13S}{25}$, $\frac{177S}{500}$ и $\frac{61S}{100}$ будут целыми в том и только в том случае, если S делится на $25, 100$ и 500. Наименьшим общим кратным $25, 100$ и 500 является число 500, т.е. наименьшее возможное значение S равно 500. *Ответ:* 500

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$5x + \big|2x - |x+a|\big| = 10|x+1|$ имеет хотя бы один корень.

Решение.

1) Перепишем данное уравнение в виде:
$$10 \cdot |x+1| - 5x - \big|2x - |x+a|\big| = 0,$$
и выражение в левой части этого уравнения обозначим через $f(x)$.

При $x \geqslant -1$ имеем: $f(x) = 10(x+1) - 5x - \big|2x - |x+a|\big|$,
$$f(x) = 5x - \big|2x - |x+a|\big| + 10.$$
Заметим, что при любом раскрытии модулей выражение $5x - \big|2x - |x+a|\big|$ является выражением вида $kx + b$, где $k \geqslant 5 - (2+1)$.

Следовательно, на любом участке внутри промежутка $[-1; +\infty)$ функция $f(x)$ определена выражением вида $f(x) = kx + b$, где $k > 0$. Поэтому при $x \geqslant -1$ функция $f(x)$ неограниченно возрастает.

Аналогично получаем, что при $x \leqslant -1$ функция $f(x)$ неограниченно убывает: $f(x) = -15x - \big|2x - |x+a|\big| - 10$, выражение $-15x - \big|2x - |x+a|\big|$ при любом раскрытии модулей является выражением вида $kx + b$, где $k \leqslant -15 + (2+1)$, $k \leqslant -12$.

2) Так как функция $f(x)$ непрерывна и неограниченно возрастает при $x \geqslant -1$, а при $x \leqslant 1$ неограниченно убывает, то уравнение $f(x) = 0$ имеет корень $\Leftrightarrow$ $f(-1) \leqslant 0$. В самом деле, если $f(-1) < 0$, то корни уравнения $f(x) = 0$ существуют в силу непрерывности и неограниченного возрастания $f(x)$ при $x \geqslant -1$. А если $f(-1) > 0$, то корней уравнения $f(x) = 0$ не существует, так как $x = -1$ — точка минимума $f(x)$, т.е. $f(x) \geqslant f(1) > 0$.

3) Выше показано, что искомыми значениями a являются те, при которых $f(-1) \leqslant 0$. Решим это неравенство: $f(-1) = 5 - \big|2 + |a-1|\big| = 3 - |a-1|$, $3 - |a-1| \leqslant 0$, $|a-1| \geqslant 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-1 \geqslant 3 \\ a-1 \leqslant -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \geqslant 4 \\ a \leqslant -2. \end{array}\right.$

Ответ: $a \in (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$

19. Каждый из 30 студентов писал одну из двух контрольных работ или писал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл писавших её студентов составил 16. Возьмём наивысший балл каждого из студентов, полученных им за эти контрольные работы (если студент писал одну работу, то берём балл за эту работу), и подсчитаем среднее арифметическое этих баллов, обозначив результат через S.

а) Приведите пример, когда $S < 16$.

б) Может ли S быть равным 8?

в) Какое наименьшее значение может принимать S, если обе контрольные работы писали 12 студентов?

Решение.

а) Например, если 20 студентов писали обе контрольные работы и получили по 20 баллов за каждую, а из остальных 10 студентов пятеро писали только 1-ую работу, другие пятеро – только 2-ую работу, и все они получили по 0 баллов, то средний балл по каждой из работ в отдельности равен $\frac{20 \cdot 20 + 0 \cdot 5}{25} = 16$, а значение S равно $\frac{20 \cdot 20}{30} = \frac{40}{3} < 16$.

б) Пусть Σ_1 – сумма баллов тех студентов, которые писали только одну контрольную, Σ_M – сумма наибольших баллов тех студентов, которые писали обе работы, Σ_m – сумма наименьших баллов этих студентов. По определению числа S имеем: $\frac{\Sigma_1+\Sigma_M}{30}=S$, $\Sigma_1+\Sigma_M=30S$. Количество студентов, писавших обе контрольные работы, обозначим через k, а через n_1 и n_2 обозначим количества студентов, писавших только 1-ую и только 2-ую работы соответственно. Отметим, что $n_1+n_2+k=30$ (число всех студентов).

Так как средний балл по 1-ой и по 2-ой работе равен 16, то сумма всех баллов по 1-ой работе равна $S_1=16(n_1+k)$, а сумма всех баллов по 2-ой работе равна $S_2=16(n_2+k)$. Поэтому сумма всех баллов по обеим работам равна $S_1+S_2=16\cdot(n_1+n_2+k+k)=16\cdot(30+k)$. С другой стороны, эта сумма равна $\Sigma_1+\Sigma_M+\Sigma_m$, т.е. $\Sigma_1+\Sigma_M+\Sigma_m=16\cdot(30+k)$. А вспомнив, что $\Sigma_1+\Sigma_M=30S$, получаем: $30S+\Sigma_m=16\cdot(30+k)$, $S=\frac{16\cdot(30+k)-\Sigma_m}{30}=16+\frac{16k-\Sigma_m}{30}$. Заметим, что поскольку сумма наименьших баллов k студентов, писавших обе работы, не может превосходить $20k$, то $\Sigma_m\leqslant 20k$ (причём знак равенства в этом неравенстве достигается лишь в том случае, если все k студентов получили 20 баллов по обеим работам). Следовательно, $S=16+\frac{16k-\Sigma_m}{30}\geqslant 16+\frac{16k-20k}{30}$, т.е. $S\geqslant 16-\frac{2k}{15}$. Если $S=8$, то из этого неравенства получаем, что $16-\frac{2k}{15}\leqslant 8$, $\frac{2k}{15}\geqslant 8$, $k\geqslant 60$, что невозможно ($k\leqslant 30$ – число всех студентов). Полученное противоречие показывает, что S не может быть равно 8.

в) Если $k=12$, то из доказанного в пункте б) неравенства $S\geqslant 16-\frac{2k}{15}$ следует, что $S\geqslant 16-\frac{24}{15}=16-\frac{8}{5}=14{,}4$. Построим пример, показывающий, что эта нижняя оценка достижима.

Для выполнения равенства $S=14{,}4$ необходимо, чтобы $\Sigma_m=20k$ (см. пункт б), т.е. все 12 студентов, писавших обе работы, получили по 20 баллов за каждую. Пусть из остальных 18 студентов 9 человек писали первую работу и 9 человек – вторую, т.е. $n_1=n_2$. Тогда суммы баллов S_1 и S_2, набранных студентами отдельно по 1-ой и по 2-ой работам, равны друг другу и равны $S_1=S_2=16\cdot(n_2+k)=16\cdot(9+12)=336$ (см. пункт б). Так как 12 студентов, писавших обе работы, в сумме набрали по каждой из работ $12\cdot 20=240$ баллов, то на других 9 человек, писавших

только одну из работ (либо 1-ую, либо 2-ую), приходится $336-240=96$ баллов. Это реализуется. например, в том случае, если из 9 человек, писавших только одну работу (либо 1-ую, либо 2-ую), 8 человек получили по 10 баллов и 1 человек получил 16 баллов. Приведённый пример показывает, что значение $S=14{,}4$ достижимо, т.е. это наименьшее возможное значение в том случае, когда обе работы писали 12 человек.

Ответ: а) 20 человек писали обе работы и получили по 20 баллов за каждую, по 5 человек писали только 1-ую и только 2-ую работы, получив по 0 баллов; б) нет; в) $14{,}4$.

Тест №7

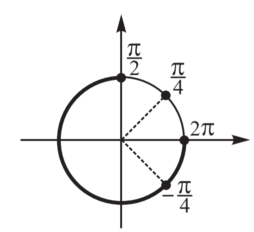
13. а) Решите уравнение $\log_2^2(\cos^2 x)-22\log_2(\cos x)-12=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.

Решение.

а) Областью определения уравнения являются те значения x, для которых $\cos x>0$. Если $\cos x>0$, то $\log_2(\cos^2 x)=2\log_2(\cos x)$, поэтому наше уравнение преобразуется к равносильному ему уравнению:
$4\log_2^2(\cos x)-22\log_2(\cos x)-12=0$. Делая замену $\log_2(\cos x)=t$ и сокращая уравнение на 2, получаем уравнение $2t^2-11t-6=0$, корнями которого являются $t_1=-\frac{1}{2}$, $t_2=6$. Возвращаясь к неизвестному x, имеем: $\log_2(\cos x)=-\frac{1}{2}$ или $\log_2(\cos x)=6$ $\Rightarrow$ $\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ или $\cos x=2^6$. Уравнение $\cos x=64$ корней не имеет, поэтому данное в условии уравнение равносильно уравнению $\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, корнями которого являются $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, где $n\in Z$.

б) Отметим на тригонометрической окружности точки, соответствующие значениям $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, где $n\in Z$, и дугу $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$, см. рисунок.



Из рисунка видим, что в промежуток $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$ попадает единственный корень нашего уравнения – $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi$, $x=\frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, где $n\in Z$; б) $\frac{7\pi}{4}$.

14. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S и основанием ABC сторона основания равна 9, а высота равна 3. На рёбрах AB, AC и AS отмечены соответственно точки M, N и K такие, что $AM = AN = AS$, $AK = 4$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Найдите объём пирамиды $KSBC$.

Решение.

а) Пусть точка O — центр правильного треугольника ABC, BH — высота треугольника ABC. Тогда $BH = AB \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$, $BO = \dfrac{2}{3} BH = 3\sqrt{3}$. Отрезок SO — высота пирамиды, см. рис. 1. По теореме Пифагора из $\triangle BSO$ имеем: $SB^2 = BO^2 + SO^2 = (3\sqrt{3})^2 + 3^2 = 36$, $SB = 6$. Далее, т.к. $BS = 6$, то $AM = AN = AS = 6$. Поэтому $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{2}{3}$ и, значит, прямая MN параллельна прямой BC и проходит через точку O, см. рис. 2.

рис. 1

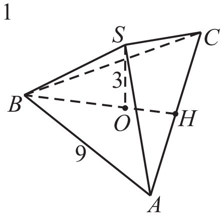
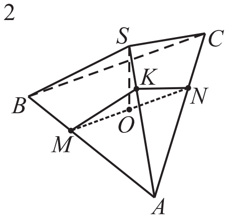


рис. 2



Так как $AK = 4$ (по условию), то $\dfrac{AK}{AS} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ и, значит, $\dfrac{AK}{AS} = \dfrac{AM}{AB}$. Следовательно, треугольники AMK и ABS подобны, поэтому прямая MK параллельна прямой BS.

По признаку параллельности двух плоскостей из параллельности прямых MN и BC и параллельности прямых MK и BS следует, что плоскости MNK и SBC параллельны, что и требовалось доказать.

б) Так как плоскости MNK и SBC параллельны, то расстояние от точки K до плоскости SBC равно расстоянию от любой другой точки плоскости MNK до плоскости SBC (все эти расстояния равны расстоянию между плоскостями, т.е. равны между собой). Следовательно, объём пирамиды $KSBC$ будет равен объёму пирамиды $PSBC$, где в качестве P можно взять любую точку плоскости MNK (у пирамид $KSBC$ и $PSBC$ одно и то же основание и равные высоты). Легче всего вычислить объём

пирамиды $PSBC$, если в качестве точки P взять точку O — в пункте а) было показано, что плоскость MNK содержит точку O.

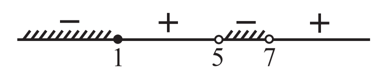
Объём пирамиды $OSBC$ равен $\dfrac{1}{3} SO \cdot S_{BOC}$, где S_{BOC} — площадь треугольника BOC. Так как точка O — центр правильного треугольника ABC со стороной 9, то $S_{BOC} = \dfrac{1}{3} S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{9^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$. Итак, искомый объём равен $\dfrac{1}{3} SO \cdot S_{BOC} = \dfrac{1}{3} \cdot 3 \cdot \dfrac{27\sqrt{3}}{4} = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$

15. Решите неравенство $\dfrac{36^x - 6^{x+1} + 3}{6^x - 5} + \dfrac{6^{x+1} - 39}{6^x - 7} \leqslant 6^x + 5$.

Решение.

Сделав замену $t = 6^x$, получим неравенство
$$\frac{t^2 - 6t + 3}{t - 5} + \frac{6t - 39}{t - 7} \leqslant t + 5.$$
Преобразуем первую дробь в левой части неравенства, выделив из неё «целую часть»: $\dfrac{t^2 - 6t + 3}{t - 5} = t + \dfrac{3 - t}{t - 5}$. Вычитая из обеих частей нашего неравенства t, получаем: $\dfrac{3 - t}{t - 5} + \dfrac{6t - 39}{t - 7} \leqslant 5$, $\dfrac{3 - t}{t - 5} + \dfrac{6t - 39}{t - 7} - 5 \leqslant 0$,
$$\frac{3 - t}{t - 5} + \frac{6t - 39 - 5t + 35}{t - 7} \leqslant 0, \quad \frac{3 - t}{t - 5} + \frac{t - 4}{t - 7} \leqslant 0,$$
$$\frac{(3 - t)(t - 7) + (t - 4)(t - 5)}{(t - 5)(t - 7)} \leqslant 0, \quad \frac{10t - t^2 - 21 + t^2 - 9t + 20}{(t - 5)(t - 7)} \leqslant 0,$$
$\dfrac{t - 1}{(t - 5)(t - 7)} \leqslant 0$. Решая полученное неравенство методом интервалов (см. данный ниже рисунок), находим, что его решениями являются $t \leqslant 1$ и $5 < t < 7$.



Возвращаясь к переменной x, получаем, что данное в условии неравенство равносильно следующей совокупности:
$$\left[\begin{array}{l} 6^x \leqslant 1 \\ 5 < 6^x < 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant 0 \\ \log_6 5 < x < \log_6 7. \end{array}\right.$$

Так как $\log_6 5 > 0$, то решениями данного в условии неравенства являются $x \in (-\infty; 0] \cup (\log_6 5; \log_6 7)$.

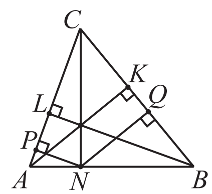
16. Отрезки $AK, BL, CN-$ высоты остроугольного треугольника ABC. Точки P и $Q-$ проекции точки N на стороны AC и BC соответственно.

а) Докажите, что прямые PQ и KL параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника $PQKL$, если известно, что $CN=12,\ AC=13,\ BC=15$.

Решение.

а) Так как PN и $QN-$ высоты прямоугольных треугольников ACN и BCN, то $CP\cdot CA=CN^2$ и $CQ\cdot CB=CN^2$. Значит, $CP\cdot CA=CQ\cdot CB$, $\dfrac{CP}{CQ}=\dfrac{CB}{CA}$.



Из прямоугольных треугольников BCL и ACK имеем: $\dfrac{CL}{CB}=\cos\angle C$, $\dfrac{CK}{CA}=\cos\angle C$. Значит, $\dfrac{CL}{CB}=\dfrac{CK}{CA}\Rightarrow\dfrac{CL}{CK}=\dfrac{CB}{CA}$.

Из доказанных выше равенств $\dfrac{CP}{CQ}=\dfrac{CB}{CA}$ и $\dfrac{CL}{CK}=\dfrac{CB}{CA}$ следует, что $\dfrac{CL}{CK}=\dfrac{CP}{CQ}\Rightarrow\dfrac{CL}{CP}=\dfrac{CK}{CQ}$. Из последнего равенства следует, что треугольник CLK подобен треугольнику CPQ (по первому признаку). Поэтому $\angle CLK=\angle CPQ$ (как соответственные углы подобных треугольников) и, значит, прямые LK и PQ параллельны, что и требовалось доказать.

б) Площадь четырёхугольника $PQKL$ найдём как разность площади треугольника CPQ и треугольника CLK.

Составим выражения для вычисления площадей S_{CLK} и S_{CPQ} треугольников CLK и CPQ. Для этого заметим, что из доказанного в пункте а) равенства $\dfrac{CL}{CB}=\dfrac{CK}{CA}=\cos\angle C$ следует подобие треугольника CLK треугольнику CBA с коэффициентом подобия $\cos\angle C$. А площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, поэтому $\dfrac{S_{CLK}}{S_{CBA}}=(\cos\angle C)^2$, $S_{CLK}=S_{CBA}\cdot(\cos\angle C)^2$. Далее, поскольку $\triangle CPQ\sim\triangle CLK$ (это было доказано в пункте а), а $\triangle CLK\sim\triangle CBA$, то

$\triangle CPQ\sim\triangle CBA$. Обозначив коэффициент подобия треугольника CPQ треугольнику CBA через k, получим: $S_{CPQ}=S_{CBA}\cdot k^2$.

Таким образом, $S_{CPQ}-S_{CLK}=S_{CBA}\cdot k^2-S_{CBA}\cdot(\cos\angle C)^2=$ $=S_{CBA}\cdot\left(k^2-(\cos\angle C)^2\right)$, и для нахождения искомой площади S_{PQKL} нам остаётся вычислить площадь треугольника ABC, а также k и $\cos\angle C$. Чтобы найти S_{ABC}, достаточно вычислить AB. Из треугольников ACN и BCN по теореме Пифагора имеем: $AN^2=AC^2-CN^2=13^2-12^2=25$, $AN=5$; $BN^2=BC^2-CN^2=15^2-12^2=81$, $BN=9$. Отсюда находим, что $AB=AN+BN=14$, $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot CN=7\cdot 12=84$.

Для коэффициента подобия k треугольников CPQ и CBA имеем:

$$k=\frac{CP}{CB}=\frac{CN^2}{CA}\cdot\frac{1}{CB}=\frac{CN^2}{AC\cdot BC}=\frac{12^2}{13\cdot 15}=\frac{48}{65}.$$

Найдём $\cos\angle C$ как косинус суммы углов ACN и BCN. Обозначив для сокращения эти углы через α и β, находим:

$$\sin\alpha=\frac{AN}{AC}=\frac{5}{13},\ \cos\alpha=\frac{CN}{AC}=\frac{12}{13},$$

$$\sin\beta=\frac{BN}{BC}=\frac{3}{5},\ \cos\beta=\frac{CN}{BC}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}.$$

По формуле косинуса суммы

$$\cos\angle C=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{12}{13}\cdot\frac{4}{5}-\frac{5}{13}\cdot\frac{3}{5}=\frac{33}{65}.$$

Итак, $S_{PQKL}=S_{CPQ}-S_{CLK}=S_{CBA}\cdot\left(k^2-(\cos\angle C)^2\right)=$

$$=84\cdot\left(\left(\frac{48}{65}\right)^2-\left(\frac{33}{65}\right)^2\right)=84\cdot\frac{48-33}{65}\cdot\frac{48+33}{65}=84\cdot\frac{15}{65}\cdot\frac{81}{65}=$$

$$=\frac{84\cdot 3\cdot 81}{13\cdot 65}=\frac{20412}{845}.$$

Ответ: $\dfrac{20412}{845}$

Примечание. Доказанное нами в решении пункта б) подобие треугольников CLK и CBA с коэффициентом подобия $\cos\angle C$ является важным свойством треугольника, «отсекаемого от исходного треугольника прямой, проходящей через основания двух высот». Это свойство достаточно часто используется в решении других задач, поэтому сформулируем его в виде следующей леммы.

Лемма. Если отрезки BB_1 и CC_1- высоты треугольника ABC, в котором ни один из углов не является прямым, то треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $|\cos\angle A|$.

В решении пункта б) эта лемма была доказана в случае остроугольного треугольника ABC. Доказательство в случае тупоугольного треугольника ABC отличается не сильно (см. решение задачи 16 теста №37).

17. Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 5 млн. рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 35 млн. рублей.

Решение.

Пусть первоначальный вклад равен S млн. рублей. Тогда в конце первого года вклад составит $1{,}1S$, а в конце второго — $1{,}21S$. В начале третьего года вклад составит $1{,}21S+5$, а в конце — $1{,}331S+5{,}5$. В начале четвёртого года вклад составит $1{,}331S+10{,}5$, а в конце — $1{,}4641S+11{,}55$.

По условию, нужно найти наибольшее целое S, для которого выполнено неравенство $1{,}4641S+11{,}55<35$; $S<16\dfrac{244}{14641}$. Наибольшее целое решение этого неравенства — число 16. Значит, размер первоначального вклада составляет 16 млн. рублей.

Ответ: 16 млн. рублей

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$\sqrt{17x^2+8ax+16}=x^2+ax+4$$
имеет ровно три различных корня.

Решение.

Данное в условии уравнение равносильно системе:
$$\begin{cases} 17x^2+8ax+16=\left(x^2+ax+4\right)^2 & (1)\\ x^2+ax+4\geqslant 0 & (2).\end{cases}$$
Преобразуем уравнение (1), воспользовавшись формулой квадрата суммы: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$. Согласно этой формуле, имеем: $(x^2+ax+4)^2=x^4+a^2x^2+16+2ax^3+8x^2+8ax$. Перенеся все слагаемые из левой части уравнения (1) в правую и произведя сокращения и группировку слагаемых, получим:
$$x^4+2ax^3+(a^2-9)x^2=0,\quad x^2\cdot(x^2+2ax+a^2-9)=0,$$
$$x^2\cdot\left((x+a)^2-9\right)=0,\quad x^2\cdot(x+a-3)\cdot(x+a+3)=0.$$

Таким образом, корнями уравнения (1) являются $x_1=0$, $x_2=-a+3$ и $x_3=-a-3$.

Исходное уравнение имеет ровно три различных корня в том и только том случае, если все три найденных выше корня уравнения (1) различны и удовлетворяют неравенству $x^2+ax+4\geqslant 0$.

Корни x_1, x_2, x_3 различны в том и только в том случае, если $-a+3\neq 0$ и $-a-3\neq 0$, т.е. при всех $a\neq\pm 3$.

Значение $x=0$ удовлетворяет неравенству $x^2+ax+4\geqslant 0$ при любом значении параметра a. Подставляя в это неравенство $x=-a+3$ и $x=-(a+3)$, получаем следующую систему неравенств для параметра a:
$$\begin{cases}(a-3)^2-a(a-3)+4\geqslant 0,\\ (a+3)^2-a(a+3)+4\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3a+13\geqslant 0\\ 3a+13\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\leqslant\dfrac{13}{3}\\ a\geqslant-\dfrac{13}{3}.\end{cases}$$
Отсюда, учитывая условие $a\neq\pm 3$, получаем, что все искомые значения параметра a — это $a\in\left[-\dfrac{13}{3};-3\right)\cup(-3;3)\cup\left(3;\dfrac{13}{3}\right]$.

19. Множество чисел назовём «хорошим», если его можно разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел.

а) Является ли хорошим множество $\{1;2;3;\ldots;99;100\}$, состоящее из первых ста натуральных чисел?

б) Является ли хорошим множество $\{2;4;8;\ldots;2^{99};2^{100}\}$, состоящее из первых ста степеней числа 2?

в) Сколько хороших подмножеств, состоящих из шести чисел, имеется у множества $\{2;3;4;5;6;7;8;9;16;17;18;19\}$?

Решение.

а) Предположим, что множество $\{1;2;3;\ldots 99;100\}$ можно разбить на два подмножества A и B, произведения всех чисел которых одинаковы, и пусть число 97 входит в множество A. Число 97 является простым, и на него не делится ни одно из чисел, входящих в множество B, поэтому произведение всех чисел из множества B не делится на 97. Так как произведение всех чисел из A делится на 97 (число 97 входит в A), а произведение всех чисел из B не делится на 97, то эти произведения не могут быть равны. То есть наше предположение не верно, и множество $\{1;2;3;\ldots 99;100\}$ не является хорошим.

б) При перемножении степеней с одинаковым основанием их показатели суммируются. Поэтому вопрос о «хорошести» множества $\{2;4;8;$

$\ldots 2^{99}; 2^{100}\}$ равносилен такому вопросу: можно ли разбить множество показателей перечисленных степеней 2, т.е. множество $\{1; 2; 3; \ldots 99; 100\}$, на два подмножества с одинаковой суммой чисел?

Заметим, что $1+100=101$, $2+99=101$, $3+98=101$, $4+97=101$, $\ldots$, $50+51=101$. Таким образом, множество $\{1; 2; 3; \ldots 99; 100\}$ разбивается на 50 пар чисел, в каждой из которых сумма чисел равна 101. Включив в множество A любые 25 из этих пар, а в множество B оставшиеся 25 пар, мы получим разбиение множества $\{1; 2; 3; \ldots 99; 100\}$ на два подмножества с одинаковой суммой чисел. Следовательно, множество $\{2; 4; 8; \ldots 2^{99}; 2^{100}\}$ является хорошим.

в) Число 5 является простым, и ни одно из других чисел данного в условии множества не делится на 5. Поэтому любое хорошее подмножество множества $\{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 16; 17; 18; 19\}$ не должно содержать число 5 (если взять любое подмножество, содержащее число 5, то при попытке разбить его на два подмножества с одинаковым произведением чисел, мы получим такое же противоречие, как и в пункте а): произведение чисел одного подмножества будет делиться на 5, а другого — нет).

Аналогичным образом, любое хорошее подмножество множества $\{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 16; 17; 18; 19\}$ не должно содержать чисел 7, 17 и 19.

Заметим, что все оставшиеся числа данного в условии множества представляют собой различные степени чисел 2 и 3 или их произведения:

$$2=2^1,\ 3=3^1,\ 4=2^2,\ 6=2\cdot 3,\ 8=2^3,\ 9=3^2,\ 16=2^4,\ 18=2\cdot 3^2.$$

Для нахождения в этом множестве, содержащем 8 чисел, всех хороших подмножеств, состоящих из 6 чисел, поступим следующим образом: определим, какие два числа можно исключить, чтобы множество оставшихся чисел было хорошим. Пусть C — одно из таких хороших множеств, т.е. оно разбивается на два подмножества A и B с одинаковым произведением чисел, которое мы обозначим через p. Тогда произведение всех чисел множества C равно p^2, т.е. содержит чётную степень числа 2 и чётную степень числа 3. Заметим, что

$$2\cdot 3\cdot (2^2)\cdot (2\cdot 3)\cdot (2^3)\cdot (3^2)\cdot (2^4)\cdot (2\cdot 3^2)=2^{12}\cdot 3^6.$$

Следовательно, исключаемые два числа должны быть такими, чтобы их произведение также содержало чётную степень числа 2 и чётную степень числа 3. Исходя из этого, для пары исключаемых чисел получаем следующие возможные варианты:

1) 2 и 2^3; 2) 2 и $2\cdot 3^2$; 3) 2^2 и 3^2

4) 2^2 и 2^4; 5) 2^3 и $2\cdot 3^2$; 6) 3^2 и 2^4;

(легче всего перечислить все эти варианты и убедиться, что других нет, следующим образом: в качестве одного исключаемого числа брать поочерёдно одно из чисел $2,\ 3,\ 2^2,\ 2\cdot 3,\ 2^3,\ 3^2,\ 2^4,\ 2\cdot 3^2$ и пытаться подобрать к нему пару так, чтобы выполнялось требуемое условие чётности для степеней 2 и 3).

Покажем, что для каждого из 6 перечисленных выше вариантов исключаемой пары чисел, множество оставшихся чисел действительно является хорошим.

1) Исключаемые числа 2 и 2^3:
множество оставшихся чисел $C=\{3;\ 2^2;\ 2\cdot 3;\ 3^2;\ 2^4;\ 2\cdot 3^2\}$,
произведение чисел множества C равно $(2^{12}\cdot 3^6):(2\cdot 2^3)=2^8\cdot 3^6$,
разбиение множества C на подмножества A и B с произведением чисел $2^4\cdot 3^3$ в каждом из них: $A=\{3;\ 3^2;\ 2^4\}$, $B=\{2^2;\ 2\cdot 3;\ 2\cdot 3^2\}$.

2) Исключаемые числа 2 и $2\cdot 3^2$:
множество оставшихся чисел $C=\{3;\ 2^2;\ 2\cdot 3;\ 2^3;\ 3^2;\ 2^4\}$,
разбиение множества C на подмножества A и B с произведением чисел $2^5\cdot 3^2$ в каждом из них: $A=\{2^2;\ 2^3;\ 3^2\}$, $B=\{3;\ 2\cdot 3;\ 2^4\}$.

3) Исключаемые числа 2^2 и 3^2:
множество оставшихся чисел $C=\{2;\ 3;\ 2\cdot 3;\ 2^3;\ 2^4;\ 2\cdot 3^2\}$,
разбиение множества C на подмножества A и B с произведением чисел $2^5\cdot 3^2$ в каждом из них: $A=\{2^4;\ 2\cdot 3^2\}$, $B=\{2;\ 3;\ 2\cdot 3;\ 2^3\}$.

4) Исключаемые числа 2^2 и 2^4:
множество оставшихся чисел $C=\{2;\ 3;\ 2\cdot 3;\ 2^3;\ 3^2;\ 2\cdot 3^2\}$,
разбиение множества C на подмножества A и B с произведением чисел $2^3\cdot 3^3$ в каждом из них: $A=\{2;\ 2\cdot 3;\ 2\cdot 3^2\}$, $B=\{3;\ 2^3;\ 3^2\}$.

5) Исключаемые числа 2^3 и $2\cdot 3^2$:
множество оставшихся чисел $C=\{2;\ 3;\ 2^2;\ 2\cdot 3;\ 3^2;\ 2^4\}$,
разбиение множества C на подмножества A и B с произведением чисел $2^4\cdot 3^2$ в каждом из них: $A=\{3^2;\ 2^4\}$, $B=\{2;\ 3;\ 2^2;\ 2\cdot 3\}$.

6) Исключаемые числа 3^2 и 2^4:
множество оставшихся чисел $C=\{2;\ 3;\ 2^2;\ 2\cdot 3;\ 2^3;\ 2\cdot 3^2\}$,
разбиение множества C на подмножества A и B с произведением чисел $2^4\cdot 3^2$ в каждом из них: $A=\{2^3;\ 2\cdot 3^2\}$, $B=\{2;\ 3;\ 2^2;\ 2\cdot 3\}$.

Приведённые примеры показывают, что все шесть перечисленных множеств C действительно являются хорошими.

Ответ: а) нет; б) да; в) 6.

Тест № 9

13. а) Решите уравнение $2\log_3^2(\operatorname{tg} x) + 5\log_3(\operatorname{ctg} x) + 2 = 0$.

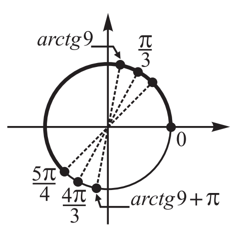
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \dfrac{5\pi}{4}\right]$.

Решение.

а) Так как $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$, то областью определения данного в условии уравнения являются те значения x, для которых $\operatorname{tg} x > 0$, и при этом оно равносильно уравнению $2\log_3^2(\operatorname{tg} x) - 5\log_3(\operatorname{tg} x) + 2 = 0$. Сделав замену $t = \log_3(\operatorname{tg} x)$, получаем уравнение $2t^2 - 5t + 2 = 0$, корнями которого являются $t_1 = \dfrac{1}{2}$, $t_2 = 2$. Возвращаясь к неизвестному x, получаем: $\log_3(\operatorname{tg} x) = \dfrac{1}{2}$ или $\log_3(\operatorname{tg} x) = 2 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ или $\operatorname{tg} x = 9$. Если $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ или $\operatorname{tg} x = 9$, то условие $\operatorname{tg} x > 0$ выполнено, поэтому исходное уравнение равносильно совокупности этих двух уравнений.

Корнями уравнения $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ являются $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in Z$, корнями уравнения $\operatorname{tg} x = 9$ являются $x = \operatorname{arctg} 9 + \pi n$, где $n \in Z$.

б) Отметим на тригонометрическом круге дугу $\left[0; \dfrac{5\pi}{4}\right]$ и точки, соответствующие корням $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n$ и $x = \operatorname{arctg} 9 + \pi n$ исходного уравнения, см. данный ниже рисунок.



Заметим, что $\operatorname{arctg} 9 > \operatorname{arctg}\sqrt{3}$ ($9 > \sqrt{3}$, функция $\operatorname{tg} x$ возрастающая, поэтому большим значениям x соответствуют большие значения $\operatorname{tg} x$). А поскольку $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3} > \dfrac{\pi}{4}$, то $\operatorname{arctg} 9 + \pi > \dfrac{4\pi}{3} > \dfrac{5\pi}{4}$, т.е. в промежуток $\left[0; \dfrac{5\pi}{4}\right]$ из корней данного в условии уравнения попадают лишь $x = \dfrac{\pi}{3}$ и $x = \operatorname{arctg} 9$.

Ответ: а) $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} 9 + \pi n$, где $n \in Z$; б) $\dfrac{\pi}{3}$, $\operatorname{arctg} 9$.

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 8, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах A_1B_1, AB и AC отмечены соответственно точки M, N и K такие, что $B_1M = AN = 2$, $CK = 4$.

а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром B_1C_1. Докажите, что $MNKL$ – прямоугольник.

б) Найдите площадь сечения данной призмы плоскостью MNK.

Решение.

а) Для сокращения записи плоскость MNK будем обозначать через α. Так как основания призмы параллельны, то плоскость α пересекает их по прямым, которые параллельны друг другу. Поэтому прямые NK и ML параллельны, см. рис. 1. Заметим, что поскольку $B_1M = AN$ и $ML \parallel NK$, то треугольники B_1ML и ANK равны по стороне и двум углам. Следовательно, четырёхугольник $MNKL$ – параллелограмм (т.к. его противоположные стороны ML и NK параллельны и равны). И для доказательства того, что $MNKL$ – прямоугольник, нам остаётся лишь показать, что один из его углов равен $90°$.

рис. 1

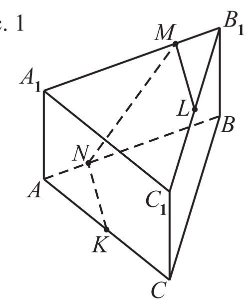
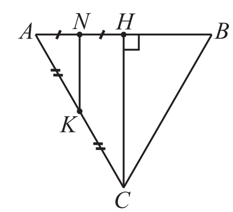


рис. 2



Пусть CH – высота треугольника ABC. Тогда $AH = \dfrac{1}{2}AB = 4$. Заметим, что $\dfrac{AN}{AH} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{AK}{AC} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ (по условию $CK = 4$, откуда $AK = AC - CK = 4$), см рис. 2. Из равенства $\dfrac{AN}{AH} = \dfrac{AK}{AC}$ следует, что прямая NK параллельна прямой CH, и, значит, $NK \perp AB$. Поскольку $NK \perp AB$ и $NK \perp AA_1$, то по известному признаку прямая NK перпендикулярна плоскости A_1AB. Отсюда следует, в частности, что $NK \perp MN$ и, значит, $\angle MNK = 90°$. Это завершает доказательство того, что $MNKL$ – прямоугольник.

б) Пусть Q – точка пересечения прямой ML с прямой A_1C_1, а P – точка пересечения прямой KQ с ребром CC_1, см. рис. 3. Другими словами, Q – это точка пересечения плоскости MNK с прямой A_1C_1. А поскольку плоскости MNK принадлежат точки K и Q, то вся прямая KQ принадлежит этой плоскости. Поэтому P – это точка пересечения плоскости MNK с ребром CC_1. Таким образом, сечением данной призмы плоскостью MNK является пятиугольник $MNKPL$.

рис. 3

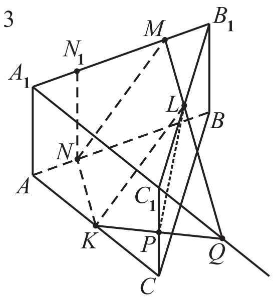
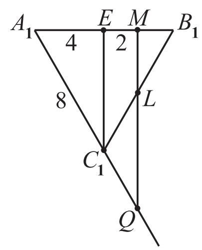


рис. 4



Искомая площадь пятиугольника $MNKPL$ равна сумме площадей S_{MNKL} прямоугольника $MNKL$ и S_{KPL} треугольника KPL. Вычислим сначала S_{MNKL}. Имеем: $S_{MNKL} = NK \cdot MN$, $NK = AK \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. Найдём MN. Пусть N_1 – проекция точки N на ребро A_1B_1, см. рис. 3. Так как $NN_1 = AA_1 = 3$, $A_1N_1 = AN = 2$, $N_1M = A_1B_1 - A_1N_1 - B_1M = 8 - 2 - 2 = 4$, то $MN^2 = NN_1^2 + N_1M^2 = 3^2 + 4^2$, $MN = 5$. Итак, $S_{MNKL} = NK \cdot MN = 10\sqrt{3}$.

Найдём длину отрезка C_1Q. Для этого заметим, что L – середина ребра B_1C_1 (K – середина ребра AC, а $B_1L = AK$ – доказано в пункте а). Поэтому если точка E – середина ребра A_1B_1, то $\dfrac{B_1M}{B_1E} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ и прямая ML является средней линией треугольника B_1C_1E, см. рис. 4. Из параллельности прямых MQ и C_1E следует, что $\dfrac{A_1C_1}{C_1Q} = \dfrac{A_1E}{EM} = \dfrac{4}{2} = 2$, откуда $C_1Q = \dfrac{A_1C_1}{2} = 4$.

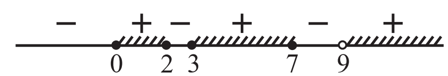
Нам остаётся найти S_{KPL}. Заметим, что $\dfrac{S_{KPL}}{S_{KQL}} = \dfrac{KP}{KQ}$, поэтому нам достаточно найти S_{KQL} и отношение $\dfrac{KP}{KQ}$. Так как $C_1Q = 4$, то $C_1Q = CK$. Поэтому треугольники CKP и C_1QP равны и, значит, $\dfrac{KP}{KQ} = \dfrac{1}{2}$. Осталось лишь заметить, что $S_{KQL} = \dfrac{1}{2} KL \cdot LQ$ (поскольку $KL \perp MQ$) и $LQ = MQ - ML = \dfrac{3}{2} C_1E - \dfrac{1}{2} C_1E = C_1E = 4\sqrt{3}$. Таким образом, $S_{KQL} = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$, $S_{KPL} = \dfrac{KP}{KQ} \cdot S_{KQL} = \dfrac{1}{2} S_{KQL} = 5\sqrt{3}$, а искомая площадь пятиугольника $MNKPL$ равна $S_{MNKL} + S_{KPL} = 10\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$.

Ответ: $15\sqrt{3}$

15. Решите неравенство $343^x - 3 \cdot 49^x + \dfrac{2 \cdot 7^{2x+1} - 7^{x+2} + 63}{7^x - 9} + 7 \geqslant 0$.

Решение.

Так как $343 = 7^3$, то сделав замену $t = 7^x$, получим неравенство $t^3 - 3t^2 + \dfrac{14t^2 - 49t + 63}{t-9} + 7 \geqslant 0$, или $t^3 - 3t^2 + \dfrac{14t^2 - 42t}{t-9} \geqslant 0$, или $t^2(t-3) + \dfrac{14t(t-3)}{t-9} \geqslant 0$, или $t(t-3) \cdot \left(t + \dfrac{14}{t-9}\right) \geqslant 0$, или $t(t-3) \cdot \dfrac{t^2 - 9t + 14}{t-9} \geqslant 0$. Квадратный трёхчлен $t^2 - 9t + 14$ имеет корни $t_1 = 2$, $t_2 = 7$, поэтому $t^2 - 9t + 14 = (t-2)(t-7)$, и наше неравенство преобразуется к виду: $\dfrac{t \cdot (t-3) \cdot (t-2) \cdot (t-7)}{t-9} \geqslant 0$. Решая это неравенство методом интервалов, см. данный ниже рисунок, получаем, что $t \in [0; 2] \cup [3; 7] \cup (9; +\infty)$.



Возвращаясь к неизвестному x, получаем, что исходное неравенство равносильно следующей совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} 0 \leqslant 7^x \leqslant 2 \\ 3 \leqslant 7^x \leqslant 7 \\ 7^x > 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant \log_7 2 \\ \log_7 3 \leqslant x \leqslant 1 \\ x > \log_7 9. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-\infty; \log_7 2] \cup [\log_7 3; 1] \cup (\log_7 9; +\infty)$

16. В прямоугольном треугольнике ABC отрезок CH – высота к гипотенузе AB, точки I и J – центры вписанных окружностей треугольников ACH и BCH соответственно. Прямые CI и CJ пересекают гипотенузу

AB в точках K и L соответственно.

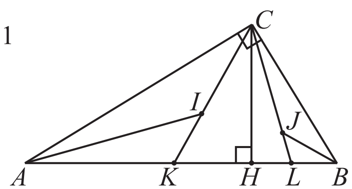
а) Докажите, что прямая KJ параллельна прямой AI, а прямая LI параллельна прямой BJ.

б) Найдите длину отрезка IJ, если $AC = 15$, $BC = 8$.

Решение.

а) Достаточно показать параллельность одной из пар прямых, для второй пары прямых доказательство полностью аналогично. Будем доказывать параллельность прямых AI и KJ, см. рис. 1.

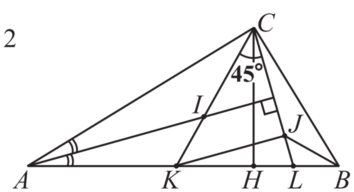
рис. 1



Заметим, что треугольник ACL — равнобедренный, $AC = AL$. В самом деле, если $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, то $\angle BCH = \alpha$, $\angle ACH = \beta$ (по известному свойству прямоугольного треугольника), а поскольку J — центр вписанной окружности $\triangle BCH$, то CJ — биссектриса угла BCH, и, значит, $\angle LCH = \frac{\alpha}{2}$, $\angle ACL = \angle ACH + \angle LCH = \beta + \frac{\alpha}{2}$, $\angle ALC = \angle LBC + \angle BCL = \beta + \frac{\alpha}{2}$ (как внешний угол треугольника LBC). Из равенств $\angle ACL = \beta + \frac{\alpha}{2} = \angle ALC$ следует, что $AC = AL$.

Так как I — центр вписанной окружности $\triangle ACH$, то AI — биссектриса угла A. В равнобедренном треугольнике ACL биссектриса AI является также и высотой, т.е. $AI \perp CL$, см. рис. 2. Поэтому для доказательства параллельности прямых AI и KJ нам достаточно доказать, что $KJ \perp CL$.

рис. 2



Заметим, что $\angle KCL = \angle KCH + \angle LCH = \frac{1}{2}\angle ACH + \frac{1}{2}\angle BCH = \frac{1}{2}\angle ACB = 45^\circ$. Также заметим, что точка J лежит на биссектрисе равнобедренного треугольника BCK (равенство $BC = BK$ доказывает-

ся точно также, как равенство $AC = AL$), и поэтому точка J равноудалена от вершин C и K, т.е. $CJ = KJ$ (в равнобедренном треугольнике биссектриса угла, противоположного основанию, является также и серединным перпендикуляром к основанию).

Так как $\triangle KCJ$ — равнобедренный треугольник с углом 45° при основании KC, то $\angle KJC = 180^\circ - 2\angle KCJ = 180^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$.

Таким образом, нами доказано, что $KJ \perp CL$ и $AI \perp CL$ (см. выше) и, значит, $KJ \parallel AI$, что и требовалось доказать.

б) В пункте а) было доказано, что $KJ \perp CL$. Абсолютно аналогично, $LI \perp CK$. Поэтому отрезки KJ и LI — высоты треугольника CKL и, значит, треугольник CJI подобен треугольнику CKL с коэффициентом подобия, равным $\cos\angle KCL$ (см. лемму в примечании к решению задачи 16 теста №7). Следовательно, $\frac{IJ}{KL} = \cos\angle KCL$. А поскольку $\angle KCL = 45^\circ$ (это было показано в пункте а), то $IJ = KL \cdot \cos 45^\circ = KL \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Чтобы вычислить длину отрезка KL, заметим, что

$$KL = AL + BK - AB = AC + BC - AB$$

(равенства $AL = AC$ и $BK = BC$ были доказаны в пункте а). По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 225 + 64 = 289$, $AB = 17$. Итак, $KL = 15 + 8 - 17 = 6$, $IJ = KL \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

Ответ: $3\sqrt{2}$

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на 1 млн. рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн. рублей)	1	0,7	0,6	0,4	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять менее 1,7 млн. рублей.

Решение.

По условию, долг перед банком (в млн. рублей) на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$1;\ 0{,}7;\ 0{,}6;\ 0{,}4;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0.$$

Пусть $k = 1 + \dfrac{r}{100}$, тогда долг на первое число каждого месяца равен:

$$k;\ 0{,}7k;\ 0{,}6k;\ 0{,}4k;\ 0{,}2k;\ 0{,}1k.$$

Следовательно, выплаты со 2-го по 14-е число каждого месяца составляют: $k - 0{,}7;\ 0{,}7k - 0{,}6;\ 0{,}6k - 0{,}4;\ 0{,}4k - 0{,}2;\ 0{,}2k - 0{,}1;\ 0{,}1k$.

Общая сумма выплат составляет:

$k(1 + 0{,}7 + 0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}1) - (0{,}7 + 0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}1) = 3k - 2$.

По условию, общая сумма выплат будет меньше $1{,}7$ млн. рублей, значит, $3k - 2 < 1{,}7,\ 3\left(1 + \dfrac{r}{100}\right) - 2 < 1{,}7,\ r < 23\dfrac{1}{3}$.

Наибольшее целое решение этого неравенства – число 23. Значит, искомое число процентов – 23.

Ответ: 23

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$5^{x^3-6x^2+34} - (a+2)\cdot\left(\sqrt{5}\right)^{x^3-6x^2+34} + a^2 - 7a + 12 = 0$$

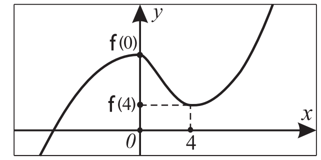
имеет ровно пять различных корней.

Решение.

1) Сделав замену $t = \left(\sqrt{5}\right)^{x^3-6x^2+34}$, получим уравнение: $t^2 - (a+2)t + a^2 - 7a + 12 = 0$ $(*)$. Уравнение $(*)$ является квадратным и при любом значении a имеет не более двух корней. Заметим, что функция $t(x) = \left(\sqrt{5}\right)^{x^3-6x^2+34}$ принимает каждое из своих значений не более чем в трёх точках (функция $\left(\sqrt{5}\right)^x$ монотонна, а кубический многочлен $x^3 - 6x^2 + 34$ принимает каждое своё значение не более трёх раз). Поэтому исходное уравнение может иметь ровно 5 корней лишь в том случае, если уравнение $(*)$ имеет два корня t_1, t_2, причём функция $t(x) = \left(\sqrt{5}\right)^{x^3-6x^2+34}$ принимает одно из значений t_1, t_2 дважды, а другое – трижды.

2) Исследуем многочлен $f(x) = x^3 - 6x^2 + 34$ при помощи производной: $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$. Видим, что $x = 0$ – точка максимума, а $x = 4$ – точка минимума $f(x)$. Так как $f(0) = 34$, $f(4) = 2$, то многочлен $f(x)$ принимает трижды каждое из значений интервала $(2; 34)$ и дважды

– значения 2 и 34 (см. эскиз графика $y = f(x)$ на данном ниже рисунке).



Отсюда, и на основании вывода пункта 1), получаем: значение параметра a является искомым $\Leftrightarrow$ уравнение $(*)$ имеет одним из своих корней число $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$ или число $\left(\sqrt{5}\right)^{34} = 5^{17}$, а второй корень этого уравнения принадлежит интервалу $\left(5; 5^{17}\right)$.

3) Рассмотрим поочерёдно обе возможности: а) корнем уравнения $(*)$ является число $t = 5$; б) корнем уравнения $(*)$ является число $t = 5^{17}$.

а) Подставляя в уравнение $(*)$ $t = 5$, получаем: $25 - (a+2)\cdot 5 + a^2 - 7a + 12 = 0,\ a^2 - 12a + 27 = 0 \Leftrightarrow a = 3$ или $a = 9$. При $a = 3$ уравнение $(*)$ имеет вид: $t^2 - 5t = 0$. Второй корень этого уравнения, отличный от $t = 5$, равен 0 и не принадлежит интервалу $\left(5; 5^{17}\right)$, поэтому $a = 3$ не является искомым. При $a = 9$ уравнение $(*)$ имеет вид: $t^2 - 11t + 30 = 0$. Второй корень этого уравнения, равный 6, принадлежит интервалу $\left(5; 5^{17}\right)$, поэтому $a = 9$ – искомое значение параметра.

б) Подставляя в уравнение $(*)$ $t = 5^{17}$, получаем: $5^{34} - (a+2)5^{17} + a^2 - 7a + 12 = 0,\ a^2 - \left(5^{17} + 7\right)a + 5^{34} - 2\cdot 5^{17} + 12 = 0$. Дискриминант этого уравнения отрицателен, корней оно не имеет. Значит, найденное выше $a = 9$ – единственное искомое значение параметра.

Ответ: $a = 9$

19. На доске написаны числа 7 и 8. За один ход разрешено заменить написанную на доске пару чисел a и b парой чисел $2a - 1$ и $a + b$. (Например, из пары чисел 7 и 8 за один ход можно получить либо числа 13 и 15, либо числа 15 и 15.)

а) Может ли случиться так, что после нескольких ходов одно из написанных на доске чисел будет равно 99?

б) Может ли случиться так, что после 22 ходов одно из написанных на доске чисел будет равно 8787878?

в) После 1001 хода на доске получили пару чисел, не равных друг другу. Какое наименьшее значение может иметь разность между большим и меньшим из этих чисел?

Решение.

а) Условимся пару чисел a и b, написанных на доске, записывать в скобках, указывая первым меньшее из чисел, если они не равны друг другу. После 1-го хода на доске будет либо пара $(13; 15)$, либо пара $(15; 15)$. После 2-го хода из пары $(13; 15)$ могут получиться пары $(25; 28)$ или $(28; 29)$, а из пары $(15; 15)$ получается пара $(29; 30)$. После 3-го хода из пары $(25; 28)$ могут получиться пары $(49; 53)$ или $(53; 55)$, из пары $(28; 29)$ получаются пары $(55; 57)$ или $(57; 57)$, а из пары $(29; 30)$ получаются пары $(57; 59)$ или $(59; 59)$.

Итак, после 3-го хода на доске будет написана одна из шести пар:

$(49; 53)$ или $(53; 55)$ или $(55; 57)$ или $(57; 57)$ или $(57; 59)$ или $(59; 59)$.

Так как после 3-го хода наименьшее возможное из написанных на доске чисел — это число 49, то после 4-го хода наименьшее возможное из написанных на доске чисел равно $2 \cdot 49 - 1 = 97$, при этом второе написанное на доске число будет больше 100 для каждой из шести возможных пар. А после 5-го хода оба написанных на доске числа становятся больше 100 для всех возможных пар. Поскольку ни в одной из пар, возникающих после 1-го, 2-го или 3-го хода, число 99 не встречалось, а после 4-го хода единственное возможное число, меньшее чем 100, это число 97, то число 99 появиться на доске не могло.

б) Пусть после некоторого хода на доске написаны числа x и y, причём $x < y$. Тогда после следующего хода на доске будут написаны либо числа $2x-1$ и $x+y$, либо числа $2y-1$, $x+y$. А поскольку $2x-1<x+y$ и $2x-1<2y-1$, то наименьшее возможное число, появляющееся на доске после следующего хода, равно $2x-1$.

Поэтому если вначале наименьшее из написанных на доске чисел равно x, то после 2-го хода наименьшее возможное из написанных на доске чисел равно $2(2x-1)-1 = 2^2 \cdot x - 3 = 2^2 \cdot x - (2^2-1)$, после 3-го хода наименьшее возможное из чисел равно $2 \cdot \left(2^2 \cdot x - (2^2-1)\right) - 1 = 2^3 \cdot x - (2^3-1)$, а после n-го хода наименьшее возможное из чисел равно $2^n \cdot x - (2^n - 1)$.

Если вначале на доске написаны числа 7 и 8, то после 22 ходов наименьшее возможное из написанных на доске чисел равно

$$2^{22} \cdot 7 - (2^{22}-1) = 2^{22} \cdot 6 + 1. \text{ Так как } 2^{11} = 2048, \text{ то}$$
$$2^{22} \cdot 6 + 1 = (2048)^2 \cdot 6 + 1 > (2000)^2 \cdot 6 + 1 > 24000000.$$

Следовательно, через 22 хода наименьшее возможное из написанных на доске чисел превзойдёт 24 миллиона, что больше, чем 8787878. Поэтому через 22 хода на доске не может быть написано число 8787878.

в) Если в какой-то момент на доске написаны числа x и y, причём $x < y$, то после следующего хода на доске будут написаны либо числа $2x-1$ и $x+y$, либо числа $2y-1$, $x+y$. В первом случае разность большего и меньшего чисел, написанных на доске, равна $y-x+1$, а во втором случае эта разность равна $y-x-1$. То есть после каждого хода разность большего и меньшего чисел, написанных на доске, либо увеличивается на 1, либо уменьшается на 1. Причём для любых двух различных чисел можно сделать ход так, чтобы разность увеличилась, и так, чтобы разность уменьшилась (если же $x = y$, то из пары чисел $(x; x)$ получается пара $(2x-1; x)$ — разность увеличивается на 1).

Изначально разность большего и меньшего чисел равна 1, а после каждого хода её чётность меняется. Поэтому после 1001-го хода разность чисел должна быть чётной. А поскольку полученные числа различны (по условию), то она не может быть равна нулю, т.е. эта разность не меньше 2. Покажем, что эта разность может быть равна 2. Если сначала сделать 501 ход, увеличивающий разность написанных чисел, а потом 500 ходов, уменьшающих эту разность, то после 1001-го хода получится два числа, разность которых равна 2.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 2.

Тест №11

13. а) Решите уравнение $27^x - 9^{x+1} - 4 \cdot 3^{x+2} + 324 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие интервалу $(1{,}5; 2)$.

Решение.

а) Сделав замену $t = 3^x$, получим уравнение $t^3 - 9t^2 - 36t + 324 = 0$. Заметив, что $324 = 9 \cdot 36$, преобразуем наше уравнение следующим образом: $t^3 - 36t - (9t^2 - 324) = 0$, $t(t^2-36) - 9(t^2-36) = 0$, $(t-9)\cdot(t^2-36) = 0$. Корнями этого уравнения являются $t = 9$ и $t = \pm 6$. Возвращаясь к неизвестному x, получаем: $3^x = 9$ или $3^x = 6$ или $3^x = -6$. Уравнение $3^x = -6$ корней не имеет, корнями первых двух уравнений являются $x = 2$ и $x = \log_3 6$.

б) Корень $x = 2$ не входит в интервал $(1{,}5; 2)$, а корень $x = \log_3 6$ принадлежит этому интервалу. Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, покажем, что $1{,}5 < \log_3 6 < 2$. Имеем:

$$\log_3 6 < 2 \ \Leftrightarrow\ 6 < 3^2 \text{ — верное неравенство;}$$

$$\log_3 6 > 1{,}5 \ \Leftrightarrow\ 6 > 3^{1{,}5},\ 6 > 3\sqrt{3} \text{ — верное неравенство.}$$

Ответ: а) $x = 2$, $x = \log_3 6$; б) $x = \log_3 6$.

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{5}$. На ребре C_1D_1 отмечена точка K так, что $C_1K = 3$, а точка M — середина ребра AB. Через точки K и M проведена плоскость γ, параллельная прямой AC.

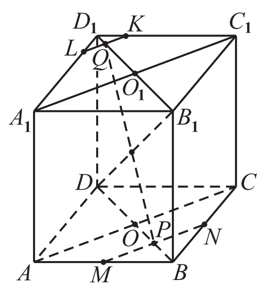
а) Докажите, что прямая B_1D перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ.

Решение.

а) Так как плоскость γ параллельна прямой AC, то она пересекает основания призмы по прямым, параллельным прямой AC. Проведём через точки M и K прямые, параллельные AC, и точки пересечения этих прямых с рёбрами BC и A_1D_1 обозначим через N и L, см. рис. 1. Плоскость $MNKL$ и есть плоскость γ.

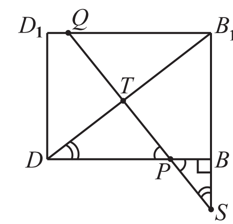
рис. 1



Заметим, что прямая B_1D_1 является проекцией прямой B_1D на плоскость верхнего основания призмы, а прямая KL перпендикулярна прямой B_1D_1. Поэтому по теореме о трёх перпендикулярах прямая KL перпендикулярна прямой B_1D. Так как $B_1D \perp KL$, то для доказательства перпендикулярности прямой B_1D и плоскости γ нам достаточно установить перпендикулярность прямой B_1D и ещё какой-нибудь прямой плоскости γ, не параллельной KL. Покажем, что B_1D перпендикулярна прямой PQ, где P и Q — точки пересечения прямых MN и KL с диагоналями BD и B_1D_1 соответственно. Для этого рассмотрим четырёхугольник B_1D_1DB, на сторонах которого лежат точки P и Q, отметив предварительно, что

$\dfrac{BP}{BO} = \dfrac{BM}{BA} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{D_1Q}{D_1O_1} = \dfrac{D_1K}{D_1C_1} = \dfrac{1}{4}$, где O и O_1 — центры квадратов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно (по условию M — середина AB, $C_1D_1 = 4$, $C_1K = 3 \Rightarrow D_1K = 1$). Так как O — середина BD, а O_1 — середина B_1D_1, то из указанных выше соотношений следует, что $\dfrac{BP}{BD} = \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{D_1Q}{B_1D_1} = \dfrac{1}{8}$.

рис. 2



Пусть T и S — точки пересечения прямой PQ с диагональю B_1D и продолжением стороны B_1B, см. рис. 2. Чтобы доказать перпендикулярность прямых B_1D и PQ, нам достаточно показать, что $\angle TDP = \angle BSP$, тогда треугольники TDP и BSP будут подобны по двум углам и, значит, $\angle PTD = \angle PBS = 90°$. Для доказательства равенства $\angle TDP = \angle BSP$ покажем, что равны тангенсы этих углов. Имеем: $\operatorname{tg}\angle TDP = \dfrac{BB_1}{BD} = \dfrac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ ($BB_1 = 2\sqrt{5}$ — по условию, $BD = 4\sqrt{2}$ как диагональ квадрата со стороной 4). Чтобы вычислить $\operatorname{tg}\angle BSP$, найдём длину BS. Из подобия треугольников SPB и SQB_1 имеем: $\dfrac{SB}{SB_1} = \dfrac{BP}{B_1Q} = \left(\dfrac{1}{4}BD\right):\left(\dfrac{7}{8}BD\right) = \dfrac{2}{7}$ $\left(B_1Q = B_1D_1 - D_1Q = B_1D_1 - \dfrac{1}{8}B_1D_1 = \dfrac{7}{8}BD\right)$. Так как $\dfrac{SB}{SB_1} = \dfrac{2}{7}$, то $SB = \dfrac{2}{5}BB_1$ (если $SB_1 = 7x$, то $SB = 2x$, $BB_1 = SB_1 - SB = 5x$). Итак, $\operatorname{tg}\angle BSP = \dfrac{BP}{SB} = \left(\dfrac{1}{4}BD\right):\left(\dfrac{2}{5}BB_1\right) = \sqrt{2} : \left(\dfrac{2}{5}2\sqrt{5}\right) = \sqrt{2} : \dfrac{4}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Сравнивая найденные значения $\operatorname{tg}\angle TDP$ и $\operatorname{tg}\angle BSP$ видим, что они равны: $\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$. Значит, $\angle TDP = \angle BSP$, $\Rightarrow \angle PTD = 90°$, т.е. $B_1D \perp PQ \Rightarrow B_1D$ перпендикулярна плоскости γ, что и требовалось доказать.

б) Так как прямая AC параллельна плоскости γ, то расстояние от любой точки Y этой прямой до плоскости γ равно одному и тому же числу.

Легче всего вычислить расстояние между прямой AC и плоскостью γ, если в качестве точки Y взять точку O.

Пусть H – проекция точки O на прямую PQ, см. рис. 3. Заметим, что поскольку $OH \perp MN$ (прямая MN перпендикулярна всем прямым в плоскости B_1BD, и прямой OH в частности) и $OH \perp PQ$ (по построению), то прямая OH перпендикулярна плоскости γ. Следовательно, искомое расстояние от точки O до плоскости γ равно длине отрезка OH.

рис. 3

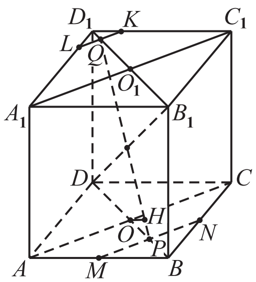
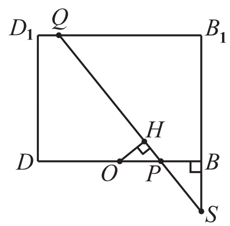


рис. 4



Для длины отрезка OH имеем: $OH = OP \cdot \sin\angle OPH$. Так как $OP = = \frac{1}{2}BO = \frac{1}{4}BD = \sqrt{2}$, то $OH = \sqrt{2}\cdot\sin\angle OPH$. Выразим синус $\angle OPH$ через котангенс угла, воспользовавшись формулой $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$. Чтобы вычислить $\operatorname{ctg}\angle OPH$, рассмотрим снова плоскость B_1BDD_1, в которой отмечены точки P, Q, O, H и S, см. рис. 4. Так как $\angle OPH = \angle SPB$, то $\operatorname{ctg}\angle OPH = \operatorname{ctg}\angle SPB = \operatorname{tg}\angle BSP$. В пункте а) было показано, что $\operatorname{tg}\angle BSP = \frac{\sqrt{10}}{4}$, поэтому $\operatorname{ctg}\angle OPH = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Итак, $\sin\angle OPH = \frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{10}/4)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+5/8}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{13}}$,

$OH = \sqrt{2}\cdot\sin\angle OPH = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{13}}$.

Ответ: $\frac{4}{\sqrt{13}}$

15. Решите неравенство $(20-17x)\cdot\log_{3x+7}(x^2-2x+2) \leqslant 0$.

Решение.

Областью определения данного в условии неравенства являются те значения x, для которых $3x+7>0$, $3x+7\neq 1$ и $x^2-2x+2>0$. Так

как $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$ при всех x, то областью определения нашего неравенства являются $x > -\frac{7}{3}$, $x \neq -2$.

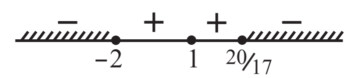
Воспользуемся следующим фактом: знак выражения $\log_a b$ при любых положительных значениях a, b, $a\neq 1$, совпадает со знаком выражения $(a-1)(b-1)$ (при этом если $\log_a b = 0$, то $(a-1)(b-1)=0$, и наоборот). Чтобы доказать это утверждение, достаточно рассмотреть поочерёдно все четыре возможных случая:

1) $a>1, b\geqslant 1$, 2) $a<1, b\leqslant 1$, 3) $a>1, b<1$, 4) $a<1, b>1$.

Применяя это утверждение к нашему неравенству, получаем, что оно равносильно следующей системе:

$$(*)\ \begin{cases} x > -\frac{7}{3},\ x\neq -2 \\ (20-17x)\cdot(3x+6)\cdot(x^2-2x+1) \leqslant 0. \end{cases}$$

Решая неравенство $(20-17x)\cdot(3x+6)\cdot(x^2-2x+1)\leqslant 0$ методом интервалов, см. данный ниже рисунок, получаем, что его решением являются $x\in(-\infty;-2]\cup\{1\}\cup[20/17;+\infty)$.



С учётом условий $x > -\frac{7}{3}$, $x\neq -2$ получаем, что решением системы $(*)$, а значит, и решением исходного неравенства, являются $x \in \left(-\frac{7}{3};-2\right)\cup\{1\}\cup\left[\frac{20}{17};+\infty\right)$.

16. Точка P – центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямые AP и BP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1 и B_1.

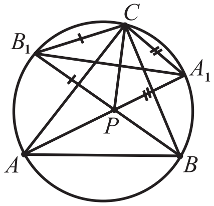
а) Докажите, что прямая CP перпендикулярна прямой A_1B_1.

б) Найдите длину отрезка A_1B_1, если $AB=6$, $\angle ACB = 30^\circ$.

Решение.

а) Сначала докажем, что $A_1C = A_1P$. Для точки B_1 абсолютно аналогично получим, что $B_1C = B_1P$. Тогда треугольники A_1B_1C и A_1B_1P равны по трём сторонам, см. рис. 1.

рис. 1



Перпендикулярность прямых CP и A_1B_1 следует из того, что A_1B_1 – биссектриса равнобедренного треугольника CPA_1 (биссектриса угла равнобедренного треугольника, противолежащего его основанию, является одновременно и высотой этого треугольника). Итак, доказательство утверждения пункта а) сведено нами к доказательству равенства $A_1C = A_1P$.

Заметим, что наряду с равенством $A_1C = A_1P$ справедливо равенство $A_1B = A_1P$, получаемое заменой точки C на B (т.е. переобозначением вершин C и B).

Чтобы доказать равенство $A_1B = A_1P$, достаточно доказать, что в треугольнике BPA_1 равны углы при вершинах B и P. Пусть α, β, γ – величины углов при вершинах A, B, C треугольника ABC. Так как центр вписанной окружности – это точка пересечения биссектрис, то $\angle BAP = \angle CAP = \alpha/2$, $\angle ABP = \angle CBP = \beta/2$, см. рисунок 2. Угол BPA_1 является внешним углом треугольника ABP, поэтому $\angle BPA_1 = \angle BAP + \angle ABP = \alpha/2 + \beta/2$.

Заметим, что поскольку $\angle A_1BC = \angle CAA_1$ (как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу), то $\angle A_1BP = \angle A_1BC + \angle CBP = \alpha/2 + \beta/2$. Вспоминая, что $\angle BPA_1 = \alpha/2 + \beta/2$, получаем, что $\angle A_1BP = \angle BPA_1$, тем самым доказательство требуемого утверждения завершено.

рис. 2

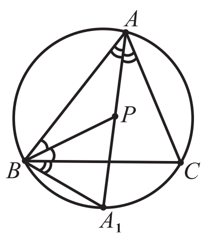
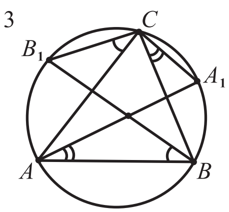


рис. 3



б) Так как $AB = 6$, $\angle ACB = 30°$, то по теореме синусов для радиуса описанной окружности треугольника ABC имеем: $2R = \dfrac{AB}{\sin\angle ACB} =$

$= \dfrac{6}{\sin 30°}$, откуда $R = \dfrac{6}{2 \cdot 0{,}5} = 6$. Искомую длину отрезка A_1B_1 найдём по теореме синусов из треугольника A_1B_1C: $A_1B_1 = 2R \cdot \sin\angle A_1CB_1$.

Найдём $\sin\angle A_1CB_1$. Заметим, что $\angle B_1CA = \angle B_1BA = \beta/2$ и $\angle A_1CB = \angle A_1AB = \alpha/2$, см. рис. 3. Поэтому $\angle A_1CB_1 = \angle A_1CB + \angle ACB + \angle B_1CA = \alpha/2 + \angle ACB + \beta/2 = (\alpha+\beta)/2 + 30°$. Так как $\alpha + \beta = 180° - \angle ACB = 150°$, то $\angle A_1CB_1 = (\alpha+\beta)/2 + 30° = 105°$.

Таким образом, $A_1B_1 = 2 \cdot 6 \cdot \sin 105° = 12\cos 15°$.

Ответ: $12\cos 15° \left(= 6\sqrt{2+\sqrt{3}}\,\right)$

17. В мае 2015 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн. рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 28% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по апрель каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в мае каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Май 2015	Май 2016	Май 2017	Май 2018
Долг (в млн. рублей)	S	0,9S	0,6S	0

Найдите наибольшее значение S, при котором общая сумма выплат будет меньше 82 млн. рублей.

Решение.

Долг перед банком (в млн. рублей) на май каждого года должен уменьшаться до нуля следующим образом: S; $0{,}9S$; $0{,}6S$; 0. По условию, в январе каждого года долг увеличивается на 28%, значит, долг в январе каждого года равен: $1{,}28S$; $1{,}152S$; $0{,}768S$. Следовательно, выплаты с февраля по апрель каждого года составляют: $0{,}38S$; $0{,}552S$; $0{,}768S$.

Общая сумма выплат должна быть меньше 82 млн. рублей:

$$0{,}38S + 0{,}552S + 0{,}768S < 82,\ 1{,}7S < 82,\ S < 48\frac{4}{17}.$$

Наибольшее целое решение этого неравенства – число 48. Значит, искомый размер кредита равен 48 млн. рублей.

Ответ: 48 млн. рублей

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} a\cdot(x^4+4)=y+2\cdot(1-|x|) \\ |x|+|y|=2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение.

1) Заметим, что оба уравнения данной системы не изменяются при замене x на $-x$. Поэтому если $(x_0; y_0)$ — решение этой системы и $x_0 \neq 0$, то $(-x_0; y_0)$ — другое решение этой системы. Поэтому решение может быть единственным только в том случае, если $x=0$. Подставляя $x=0$ в первое уравнение системы, получаем: $4a=y+2$, $y=4a-2$. Так как пара $x=0$, $y=4a-2$ должна удовлетворять второму уравнению системы, то выполнив соответствующую подстановку, получим: $|4a-2|=2$, откуда $a=0$ или $a=1$.

2) Для каждого значения $a=0$, $a=1$ проверим, действительно ли данная в условии система имеет единственное решение.

Если $a=0$, то система принимает вид:

$$\begin{cases} y+2\cdot(1-|x|)=0 \\ |x|+|y|=2. \end{cases}$$

Легко проверить (прямой подстановкой), что кроме $x=0$, $y=-2$ решениями системы являются также $x=\pm\frac{4}{3}$, $y=\frac{2}{3}$. (Эти решения проще всего найти графическим способом, изобразив на плоскости Oxy множества точек, удовлетворяющих уравнениям $y=2\cdot(|x|-1)$ и $|y|=2-|x|$.) Таким образом, значение $a=0$ не является искомым.

Если $a=1$, то система принимает вид:

$$\begin{cases} x^4+4=y+2\cdot(1-|x|) \\ |x|+|y|=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^4+2|x|+2 \\ |x|+|y|=2. \end{cases}$$

При $x\neq 0$ из первого уравнения имеем: $y\geqslant 2$. Но тогда $|x|+|y|>2$, а это противоречит второму уравнению системы. Следовательно, решений системы, отличных от пары $x=0$, $y=2$, нет. Поэтому значение $a=1$ является искомым.

Ответ: $a=1$

19. Дано натуральное трёхзначное число n, в записи которого нет нулей. Для этого числа составим дробь $f(n)$, в числителе которой само число n, а в знаменателе — произведение всех цифр числа n.

а) Приведите пример такого числа n, для которого $f(n)=\frac{119}{24}$.

б) Существует ли такое n, что $f(n)=\frac{125}{24}$?

в) Какое наибольшее значение может принимать дробь $f(n)$, если она равна несократимой дроби со знаменателем 24?

Решение.

а) Заметим, что $\frac{119\cdot 2}{24\cdot 2}=\frac{238}{48}=\frac{238}{2\cdot 3\cdot 8}$. Поэтому число $n=238$ удовлетворяет требуемому условию.

б) Предположим, что существует трёхзначное число n такое, что $f(n)=\frac{125}{24}$. Обозначим через a, b, c цифры этого числа, начиная с первой, тогда $\frac{n}{a\cdot b\cdot c}=\frac{125}{24}$, $24n=125\,a\cdot b\cdot c \Rightarrow n$ кратно 25. Если число кратно 25, то последние две цифры этого числа либо 25 либо 75, т.е. возможны только два случая: 1) $b=2$, $c=5$; 2) $b=7$, $c=5$.

Из равенства $24n=125\,a\cdot b\cdot c$ следует, что число $a\cdot b\cdot c$ кратно 24, т.е. кратно 8 и кратно 3. Но поскольку ни в случае 1), ни в случае 2) ни одна из цифр b и c не делится на 3, то цифра a должна делиться на 3, т.е. либо $a=3$, либо $a=6$, либо $a=9$. В каждом из этих случаев число $a\cdot b\cdot c$ не делится на 8. Полученное противоречие показывает, что равенство $\frac{n}{a\cdot b\cdot c}=\frac{125}{24}$ невозможно.

в) Пусть $\frac{p}{24}$ — несократимая дробь, такая, что $f(n)=\frac{n}{a\cdot b\cdot c}=\frac{p}{24}$. Возможны два случая: 1) $n=p\cdot m$, где $m\geqslant 2$, если дробь $\frac{p}{24}$ получается в результате сокращения дроби $\frac{n}{a\cdot b\cdot c}$ на число m;
2) $n=p$ и $a\cdot b\cdot c=24$, если дробь $\frac{n}{a\cdot b\cdot c}$ сама является несократимой.

В первом случае имеем: $\frac{p\cdot m}{24\cdot m}\leqslant\frac{999}{48}$ ($n=p\cdot m$ — трёхзначное число, поэтому $p\cdot m\leqslant 999$). Поэтому в случае 1) наибольшее значение $f(n)$ не превосходит $\frac{999}{48}=\frac{333}{16}$.

Рассмотрим второй случай. Число 24 может быть представлено в виде произведения трёх цифр одним из следующих способов:

$$24=1\cdot 3\cdot 8;\quad 24=1\cdot 4\cdot 6;\quad 24=2\cdot 3\cdot 4;\quad 24=2\cdot 2\cdot 6.$$

Поэтому цифры a, b, c — это либо $1, 3, 8$, либо $1, 4, 6$, либо $2, 3, 4$, либо $2, 2, 6$, взятые в каком-либо порядке. Соответствующие всем этим случаям дроби $f(n)$ расположим в порядке убывания. Заметим, что дробь

$f(n)=\dfrac{n}{24}$ имеет тем большее значение, чем больше цифра a. Поэтому первые две по величине дроби $f(n)$ это дроби $\dfrac{831}{24}$ и $\dfrac{641}{24}$. Но дробь $\dfrac{831}{24}$ сократима, т.к. число 831 кратно 3. Дробь $\dfrac{641}{24}$ несократима (641 не делится ни на 2, ни на 3). Поэтому в случае 2) наибольшее значение $f(n)$ равно $\dfrac{641}{24}$. Сравнивая это значение с оценкой $f(n)$, полученной в случае 1), видим, что $\dfrac{641}{24}>\dfrac{333}{16}$, т.е. $\dfrac{641}{24}$ это наибольшее возможное значение $f(n)$.

Ответ: а) 238; б) нет; в) $\dfrac{641}{24}$.

Тест №13

13. а) Решите уравнение: $2\cos 2x+4\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+1=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

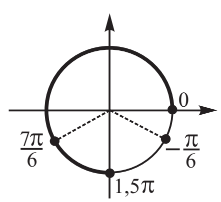
Решение.

а) Применив формулы $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ и $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$, запишем исходное уравнение в виде:

$$2-4\sin^2 x+4\sin x+1=0.$$

Замена неизвестного $t=\sin x$ приводит к уравнению $4t^2-4t-3=0$, которое имеет корни $t=\dfrac{3}{2}$ и $t=-\dfrac{1}{2}$. Возвращаясь к неизвестному x, получаем: $\sin x=\dfrac{3}{2}$ или $\sin x=-\dfrac{1}{2}$. Уравнение $\sin x=\dfrac{3}{2}$ корней не имеет. Корнями уравнения $\sin x=-\dfrac{1}{2}$ являются $x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, где $n\in Z$.

б) Отметим на тригонометрической окружности дугу $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$ и точки $x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, см. данный справа рисунок. Из отмеченных точек на дугу $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$ попадает лишь точка $x=\dfrac{7\pi}{6}$.



Ответ: а) $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, где $n\in Z$; б) $\dfrac{7\pi}{6}$.

14. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точки M и N — середины боковых рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану основания CE в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α, если известно, что сторона основания AB равна 18, а боковое ребро SA равно 12.

Решение.

а) Пусть точка O — центр треугольника ABC, тогда SO — высота пирамиды. Так как прямая SO перпендикулярна плоскости ABC и плоскость α перпендикулярна плоскости ABC (по условию), то прямая SO параллельна плоскости α. Поэтому линии пересечения плоскости α с плоскостями ASO и BSO параллельны прямой SO — на рисунке 1 это прямые MP и NQ.

рис. 1

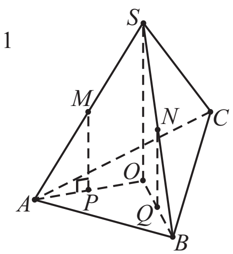
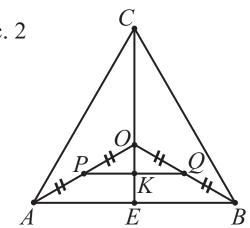


рис. 2

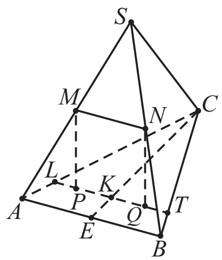


Точки M и N — середины рёбер SA и SB (по условию), поэтому точки P и Q — середины отрезков AO и BO. Пусть K — точка пересечения отрезков PQ и OE. Так как PQ — средняя линия треугольника AOB, то K — середина отрезка OE, см. рисунок 2. Следовательно, $EK=OK=$ $=\dfrac{1}{2}OE$. Точка O — центр правильного треугольника ABC, поэтому $CO=2OE$. Таким образом, $CK=CO+OK=2OE+\dfrac{1}{2}OE=\dfrac{5}{2}OE$, $CK:EK=\left(\dfrac{5}{2}OE\right):\left(\dfrac{1}{2}OE\right)=5:1$, что и требовалось доказать.

б) Пусть L и T — точка пересечения прямой PQ с рёбрами AC и BC, см. рисунок 3. Тогда четырёхугольник $LMNT$ — трапеция, которая является сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α. Нам требуется найти объём пирамиды $CLMNT$. Высотой этой пирамиды является отрезок

CK ($CK\perp PQ$ и $CK\perp MP$, поэтому прямая CK перпендикулярна плоскости α). Значит, искомый объём равен $V=\dfrac{1}{3}CK\cdot S_{LMNT}$.

рис. 3



По условию, $AB=18\Rightarrow CE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB=9\sqrt{3}$. В пункте а) было доказано, что $CK:EK=5:1$, отсюда следует, что $CK=\dfrac{5}{6}CE=\dfrac{5}{6}9\sqrt{3}=$ $=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$, $LT=\dfrac{5}{6}AB=\dfrac{5}{6}\cdot 18=15$. Отрезок MN – средняя линия треугольника ASB, поэтому $MN=\dfrac{1}{2}AB=9$. Так как прямая MP параллельна высоте пирамиды SO (см. пункт а), то она перпендикулярна плоскости ABC и, в частности $MP\perp LT$. Значит, отрезок MP – высота трапеции $LMNT$. Так как MP – средняя линия треугольника ASO (см. рис. 1), то $MP=\dfrac{1}{2}SO$. Из прямоугольного треугольника ASO имеем: $SO^2=AS^2-AO^2=12^2-\left(\dfrac{2}{3}\cdot 9\sqrt{3}\right)^2=12^2-(6\sqrt{3})^2=36$, $SO=6$, отсюда $MP=3$.

Итак, для площади трапеции $LMNT$ получаем следующее значение: $S_{LMNT}=\dfrac{1}{2}(MN+LT)\cdot MP=\dfrac{1}{2}(9+15)\cdot 3=36$. А объём пирамиды $CLMNT$ равен $V=\dfrac{1}{3}CK\cdot S_{LMNT}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{15\sqrt{3}}{2}\cdot 36=90\sqrt{3}$.

Ответ: $90\sqrt{3}$

15. Решите неравенство: $\dfrac{4}{\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-9}-\dfrac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-1}-3^{x-1}>0.$

Решение.

Сделаем замену неизвестного $t=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{4}{3(t-3)}-\frac{1}{t-1}-\frac{1}{3t}>0;\quad \frac{4(t-1)\,t-3(t-3)\,t-(t-3)(t-1)}{3(t-3)(t-1)\,t}>0;$$

$$\frac{4t^2-4t-3t^2+9t-t^2+4t-3}{(t-3)(t-1)\,t}>0;\quad \frac{9t-3}{(t-3)(t-1)\,t}>0.$$

Решая это неравенство методом интервалов, получаем: $t<0$ или $\dfrac{1}{3}<t<1$ или $t>3$. Вернёмся к неизвестному x:

если $t<0$, то $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<0$ – это неравенство не имеет решений;

если $\dfrac{1}{3}<t<1$, то $\dfrac{1}{3}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<1\Leftrightarrow 0<x<1$;

если же $t>3$, то $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x>3\Leftrightarrow x<-1$.

Объединяя найденные множества значений x, приходим к ответу.

Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$.

16. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямыми углами при вершинах A и B расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD, а вторая – боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P. Докажите, что $\dfrac{AP}{DP}=\sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны 4 и 1.

Решение.

а) Пусть Q – точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции, а точки O_1, O_2 – центры первой и второй окружностей соответственно, см. данный ниже рисунок 1. Так как обе окружности касаются прямых AB и CD, то обе точки O_1, O_2 равноудалены от сторон угла AQD. Значит, обе точки O_1, O_2 лежат на биссектрисе угла AQD, т.е. прямая O_1O_2 совпадает с биссектрисой угла AQD. Поэтому из треугольника AQD по свойству биссектрисы имеем: $\dfrac{AP}{DP}=\dfrac{AQ}{DQ}=\sin\angle D$, ч.т.д.

рис. 1

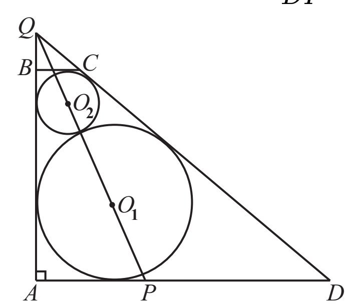
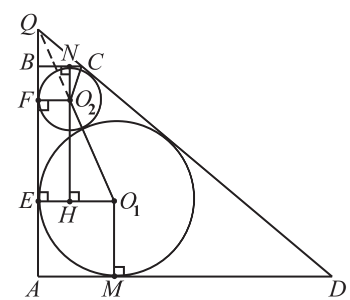


рис. 2



б) Пусть первая окружность радиуса $R = 4$ касается боковой стороны AB в точке E и основания AD в точке M, а вторая окружность радиуса $r = 1$ касается боковой стороны AB в точке F и основания BC в точке N. Точкой H обозначим проекцию точки O_2 на отрезок O_1E, см. рисунок 2. Тогда $O_1H = O_1E - HE = O_1E - O_2F = R - r = 4 - 1 = 3$, а так как линия центров окружностей проходит через их точку касания, то $O_1O_2 = R + r = 4 + 1 = 5$. Поэтому $EF = O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Отрезок AB является высотой трапеции, а его длина равна $AB = AE + EF + BF = R + EF + r = 4 + 4 + 1 = 9$. Чтобы найти искомую площадь трапеции $ABCD$, нам остаётся найти длины оснований BC и AD. А поскольку $BC = BN + CN = r + CN$ и $AD = AM + DM = R + DM$, то нам достаточно найти длины отрезков CN и DM. Заметим, что CO_2 и DO_1 — биссектрисы внутренних углов C и D трапеции. Также заметим, что $\angle AQO_1 = \angle HO_2O_1$, и обозначим градусную меру этого угла через α. Тогда $\angle AQD = 2\alpha$, $\angle D = 90^\circ - 2\alpha$, $\angle O_1DM = \frac{1}{2}\angle D = 45^\circ - \alpha$. Так как $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\angle HO_2O_1 = \frac{O_1H}{O_2H} = \frac{3}{4}$, то применив формулу тангенса разности, получим: $\operatorname{tg}\angle O_1DM = \frac{\operatorname{tg}45^\circ - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}45^\circ + \operatorname{tg}\alpha} = \frac{1 - 3/4}{1 + 3/4} = \frac{1}{7}$. Далее имеем: $\angle O_2CN = \frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle D) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle D = 90^\circ - \angle O_1DM$, и, значит, $\operatorname{tg}\angle O_2CN = \operatorname{tg}(90^\circ - \angle O_1DM) = \operatorname{ctg}\angle O_1DM = 7$.

Из прямоугольных треугольников O_2CN и O_1DM находим, что $CN = \frac{r}{\operatorname{tg}\angle O_2CN} = \frac{1}{7}$, $DM = \frac{R}{\operatorname{tg}\angle O_1DM} = \frac{4}{1/7} = 28$.

Итак, $BC = r + CN = 1 + \frac{1}{7} = \frac{8}{7}$, $AD = R + DM = 4 + 28 = 32$, а для искомой площади трапеции получаем: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AB\cdot(BC + AD) = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot\left(32 + \frac{8}{7}\right) = \frac{1044}{7}$.

17. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 20 млн. рублей на некоторый срок, равный целому числу лет. Условия возврата кредита таковы:
— каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 47 млн. рублей?

Решение.

Пусть кредит планируется взять на n лет. Так как долг перед банком по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно, то последовательность долгов по состоянию на июль (в млн. рублей) должна иметь следующий вид:
$$20,\ \frac{20(n-1)}{n},\ \frac{20(n-2)}{n},\ \ldots,\ \frac{20}{n},\ 0.$$
По условию, каждый январь долг возрастает на 30%, значит, последовательность размеров долга (в млн. рублей) по состоянию на январь такова:
$$26,\ \frac{26(n-1)}{n},\ \frac{26(n-2)}{n},\ \ldots,\ \frac{26}{n}.$$
При этом последовательность выплат (в млн. рублей) будет такой:
$$26 - \frac{20(n-1)}{n},\ \frac{26(n-1)}{n} - \frac{20(n-2)}{n},\ \frac{26(n-2)}{n} - \frac{20(n-3)}{n},\ \ldots,\ \frac{26}{n}.$$
Просуммируем все эти выплаты, сгруппировав слагаемые следующим образом: $26 + \left(\frac{26(n-1)}{n} - \frac{20(n-1)}{n}\right) + \left(\frac{26(n-2)}{n} - \frac{20(n-2)}{n}\right) + \ldots$ $\ldots + \left(\frac{26}{n} - \frac{20}{n}\right)$ — из каждой выплаты берётся второе слагаемое, перед которым стоит знак «−», и группируется с первым слагаемым следующей выплаты, перед которым стоит знак «+». Отсюда легко видеть, что выражение для общей суммы выплат можно преобразовать таким образом:
$$26 + 6\cdot\left(\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = 26 + 6\cdot\frac{n(n-1)/2}{n} = 26 + 3(n-1).$$
Так как по условию общая сумма выплат равна 47 млн. рублей, то получаем уравнение $26 + 3(n-1) = 47$, из которого находим, что $n = 8$.

Ответ: 8

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2x - 2y + 2 = |x^2 + y^2 - 1| \\ 2ax - 2y + 1 = 0 \end{cases}$ имеет более двух решений.

Решение.

Данную задачу будем решать графически. Искомыми значениями параметра a являются те, для которых прямая $2ax - 2y + 1 = 0$ имеет более двух общих точек с множеством решений первого уравнения системы.

1) Снимем знак модуля в первом уравнении системы. Если $x^2+y^2 \geqslant 1$, то $|x^2+y^2-1| = x^2+y^2-1$, и первое уравнение системы преобразуется к виду: $x^2-2x+y^2+2y=3$, или $(x-1)^2+(y+1)^2=5$ — это уравнение окружности с центром в точке $(1;-1)$ и радиуса $\sqrt{5}$.

Если же $x^2+y^2 \leqslant 1$, то $|x^2+y^2-1| = 1-x^2-y^2$, и первое уравнение системы преобразуется к виду: $x^2+2x+y^2-2y=-1$, или $(x+1)^2+(y-1)^2=1$ — это уравнение окружности с центром в точке $(-1;1)$ и радиуса 1.

Условие $x^2+y^2>1$ задаёт точки, лежащие вне окружности радиуса 1 с центром в точке $(0;0)$, а условие $x^2+y^2<1$ задаёт точки, лежащие внутри этой же окружности. Поэтому решением первого уравнения системы является часть окружности $(x-1)^2+(y+1)^2=5$, лежащая вне окружности $x^2+y^2=1$, и часть окружности $(x+1)^2+(y-1)^2=1$, лежащая внутри окружности $x^2+y^2=1$, а также те точки этих окружностей, для которых выполнено равенство $x^2+y^2=1$ (если $x^2+y^2=1$, то снимая знак модуля в выражении $|x^2+y^2-1|$ можно поставить перед ним как знак «+», так и знак «−», поскольку $|0|=0=-0$).

2) Найденное выше множество решений 1-го уравнения системы представляет собой объединение дуг ω_1 и ω_2 окружностей с центрами в точках O_1 и O_2, радиусов $\sqrt{5}$ и 1, лежащих соответственно вне и внутри окружности $x^2+y^2=1$, а также граничные точки A и B этих дуг, см. рисунок 1.

рис. 1

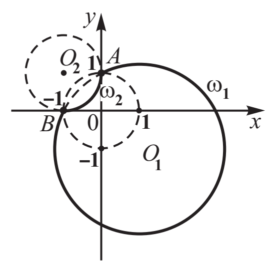
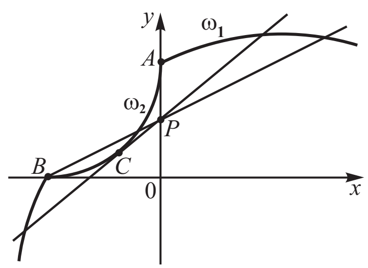


рис. 2



Уравнение $2ax-2y+1=0$ преобразуем следующим образом: $y=ax+0{,}5$. Это уравнение задаёт прямую, угловой коэффициент которой равен a, и которая при любом значении a проходит через точку с координатами $(0;0{,}5)$. Точку $(0;0{,}5)$ обозначим буквой P и проведём касательную PC к дуге ω_2, см. рисунок 2. Из этого рисунка следует, что прямая $y=ax+0{,}5$ имеет более двух общих точек с объединением дуг

ω_1 и ω_2, включая их концевые точки A и B, в том и только том случае, если она содержится внутри угла BPC, включая его границы. Угловой коэффициент прямой BP равен $0{,}5/1=0{,}5$. Пусть a_0 — угловой коэффициент прямой CP, тогда искомые значения a — это $0{,}5 \leqslant a \leqslant a_0$.

3) Нам остаётся лишь найти угловой коэффициент прямой CP. Для этого нам достаточно найти координаты точки C. Заметим, что $CP=AP$ — как отрезки касательных к окружности. Так как $AP=0{,}5$, а $CP^2 = (x-0)^2+(y-0{,}5)^2$, где $(x;y)$ — координаты точки C, и, кроме того, точка C принадлежит окружности $(x+1)^2+(y-1)^2=1$, то для нахождения координат точки C имеем систему:

$$\begin{cases} x^2+(y-0{,}5)^2=0{,}25 \\ (x+1)^2+(y-1)^2=1. \end{cases}$$

Вычитая из 2-го уравнения этой системы её первое уравнение, получаем: $(x+1)^2-x^2+(y-1)^2-(y-0{,}5)^2=0{,}75$, $2x+1-y+0{,}75=0{,}75$, $y=2x+1$. Подставив $y=2x+1$ во второе уравнение системы, получим: $(x+1)^2+(2x)^2=1$, $5x^2+2x=0$, откуда $x=0$ или $x=-0{,}4$. Значение $x=0$ соответствует точке A, а не точке C, поэтому абсцисса точки C это $x=-0{,}4$, а ордината — $y=2\cdot(-0{,}4)+1=0{,}2$.

Для углового коэффициента прямой имеет место следующая формула: $k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$, где $(x_1;y_1),(x_2;y_2)$ — координаты каких-либо двух точек, лежащих на прямой. Подставляя в эту формулу координаты точек C и P, для углового коэффициента a_0 прямой CP получаем: $a_0=\dfrac{0{,}2-0{,}5}{-0{,}4-0}=\dfrac{3}{4}$.

Ответ: $0{,}5 \leqslant a \leqslant 0{,}75$

19. На доске было написано 35 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Решение.

а) Так как среднее арифметическое 35-ти написанных на доске чисел было равно 7, то сумма этих чисел была равна $35 \cdot 7 = 245$.

Пусть среди первоначально написанных на доске чисел было k чисел, равных 1. Тогда после уменьшения всех чисел в два раза и стирания с доски результатов, меньших 1, на доске останется $35 - k$ чисел (те из чисел, которые первоначально были больше 1), а сумма оставшихся чисел будет равна $\frac{245-k}{2}$. Поэтому среднее арифметическое оставшихся на доске чисел будет равно $\frac{245-k}{2(35-k)} = \frac{245-k}{70-2k}$. Если это среднее арифметическое больше 14, то $\frac{245-k}{70-2k} > 14 \Leftrightarrow 245 - k > 14 \cdot (70-2k) \Leftrightarrow 27k > 735$, $k > \frac{735}{27} = 27\frac{6}{27}$. А поскольку k – целое число, то $k \geqslant 28$.

Допустим, что среди первоначально написанных на доске чисел было 28 чисел, равных 1, и 7 чисел, равных 31. Тогда среднее арифметическое этих 35 чисел равно $\frac{28+7\cdot 31}{35} = \frac{245}{35} = 7$, а после уменьшения всех чисел в два раза и стирания с доски результатов, меньших 1, на доске останутся 7 чисел, равных 15,5. Среднее арифметическое оставшихся чисел равно 15,5, что больше 14. Поэтому ответ в пункте а) – да, могло.

б) Как и в пункте а), число первоначально написанных на доске единиц обозначим через k. Согласно выкладкам, сделанным в пункте а), для выполнения условий пункта б) необходимо, чтобы выполнялись неравенства: $12 < \frac{245-k}{70-2k} < 13 \Leftrightarrow 12\cdot(70-2k) < 245 - k < 13\cdot(70-2k) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 595 < 23k \\ 25k < 665 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{595}{23} < k < \frac{665}{25} \Leftrightarrow 25\frac{20}{23} < k < 26{,}6 \Leftrightarrow k = 26.$$

Допустим, что среди первоначально написанных на доске чисел было 26 единиц, 8 чисел, равных 24 и одно число, равное 27. Тогда среднее арифметическое этих 35 чисел равно $\frac{26+8\cdot 24+27}{35} = 7$, а после уменьшения всех чисел в два раза и стирания с доски результатов, меньших 1, на доске останутся 8 чисел, равных 12, и одно число, равное 13,5. При этом в силу выполнения указанных выше неравенств для $k = 26$, среднее арифметическое оставшихся чисел будет больше 12, но меньше 13. Ответ в пункте б) – да, могло.

в) Если первоначально на доске было написано k единиц, то среднее

арифметическое чисел, оставшихся на доске после указанной в условии операции, будет равно $\frac{245-k}{70-2k}$ – см. пункт а). Чтобы легче было найти наибольшее возможное значение этого выражения, сначала преобразуем его: $\frac{245-k}{70-2k} = \frac{1}{2} + \frac{105}{35-k}$. Значение этого выражения будет тем больше, чем больше значение k. Оценим это значение. Так как первоначально на доске было написано k единиц и $35 - k$ чисел, отличных от 1, каждое из которых не превосходит 40 (по условию), то для суммы S всех написанных на доске чисел выполняется неравенство: $S \leqslant k + 40\cdot(35-k)$. С другой стороны, $S = 245$, поэтому для числа k справедливы следующие неравенства: $245 \leqslant 1400 - 39k$, $39k \leqslant 1155$, $k \leqslant 29\frac{24}{39} \Rightarrow k \leqslant 29$.

Поэтому для значения выражения $\frac{1}{2} + \frac{105}{35-k}$ справедлива следующая оценка: $\frac{1}{2} + \frac{105}{35-k} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{105}{35-29} = 18$.

Приведем пример, показывающий, что эта оценка достижима, т.е. что среднее арифметическое оставшихся на доске чисел действительно могло стать равным 18. Пусть первоначально на доске было написано 29 единиц и 6 чисел, равных 36. Тогда среднее арифметическое этих 35 чисел равно $\frac{29+6\cdot 36}{35} = 7$, а после уменьшения всех чисел в два раза и стирания с доски результатов, меньших 1, на доске останутся 6 чисел, равных 18.

Ответ: а) да; б) да; в) 18.

Тест №15

13. а) Решите уравнение:

$$\sin 2x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin x + \sqrt{3}.$$

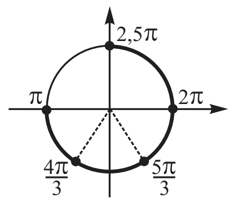
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Воспользовавшись формулой $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, преобразуем данное уравнение к виду: $(2\sin x + \sqrt{3})\cdot\cos x - (2\sin x + \sqrt{3}) = 0$, $(2\sin x + \sqrt{3})\cdot(\cos x - 1) = 0$. Произведение двух множителей равно нулю в том и только том случае, если один из них равен нулю, поэтому $2\sin x + \sqrt{3} = 0$ или $\cos x - 1 = 0$, откуда $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos x = 1$. Корнями уравнения $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ являются $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$, где

$n\in Z$, а корнями уравнения $\cos x=1$ являются $x=2\pi n$, где $n\in Z$.

б) Отметим на тригонометрической окружности дугу $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$ и точки $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n$, $x=2\pi n$, см. данный ниже рисунок. Из отмеченных точек на дугу $[\pi;2{,}5\pi]$ попадают точки $x=\frac{4\pi}{3}$, $x=\frac{5\pi}{3}$, $x=2\pi$.



Ответ: а) $x=2\pi n$, $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n$, где $n\in Z$; б) $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, 2π.

14. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=3$ и $BC=2$. Известны длины боковых рёбер пирамиды: $SA=4\sqrt{2}$, $SB=\sqrt{41}$, $SD=6$.

а) Докажите, что $SA-$ высота пирамиды.

б) Найдите угол между плоскостью ASD и прямой SO, где $O-$ точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$.

Решение.

а) Так как $SD^2=36$ и $SA^2+AD^2=(4\sqrt{2})^2+2^2=36$, см. рис. 1, то $SD^2=SA^2+AD^2$. Поэтому по теореме, обратной к теореме Пифагора, $\angle DAS=90^\circ$.

рис. 1

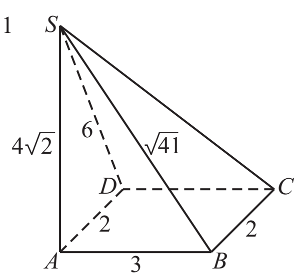
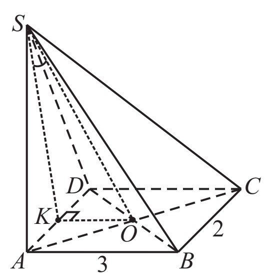


рис. 2



Аналогично, из равенств $SB^2=41$ и $SA^2+AB^2=(4\sqrt{2})^2+3^2=41$, следует, что $SB^2=SA^2+AB^2$ и, значит, $\angle BAS=90^\circ$.

Так как $SA\perp AB$ и $SA\perp AD$, то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая SA перпендикулярна плоскости ABD, т.е. SA является высотой пирамиды $SABCD$, что и требовалось доказать.

б) Пусть $OK-$ перпендикуляр к стороне AD, см. рис. 2. Так как $OK\perp AD$ и $OK\perp SA$, то прямая OK перпендикулярна плоскости ASD. Следовательно, точка $K-$ это проекция точки O на плоскость ASD, и, значит, искомый угол между прямой SO и плоскостью $ASD-$ это угол OSK.

Из прямоугольного треугольника AKS имеем: $SK^2=SA^2+AK^2=$ $=(4\sqrt{2})^2+1^2$, $SK=\sqrt{33}$. Заметим, что $OK-$ средняя линия треугольника ACD, поэтому $OK=\frac{1}{2}CD=\frac{3}{2}$. Из треугольника OSK находим, что $\operatorname{tg}\angle OSK=\frac{OK}{SK}=\frac{3}{2\sqrt{33}}=\frac{3\cdot\sqrt{33}}{2\cdot 33}=\frac{\sqrt{33}}{22}$.

Таким образом, $\angle OSK=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{33}}{22}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{33}}{22}$

15. Решите неравенство: $\frac{3^{x+1}}{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}-\frac{3^x}{2^x-3^x}\geqslant 0.$

Решение.

Преобразуем данное неравенство, разделив и числитель и знаменатель обеих дробей в левой его части на 3^x: $\frac{3}{3\cdot(2/3)^x-2}-\frac{1}{(2/3)^x-1}\geqslant 0.$ Сделав в этом неравенстве замену неизвестного $t=(2/3)^x$, получаем: $\frac{3}{3t-2}-\frac{1}{t-1}\geqslant 0$, $\frac{3(t-1)-3t+2}{(3t-2)(t-1)}\geqslant 0$, $\frac{1}{(3t-2)(t-1)}\leqslant 0$. Решая полученное неравенство методом интервалов, находим, что его решениями являются $2/3<t<1$. Следовательно, исходное неравенство равносильно двойному неравенству $\frac{2}{3}<\left(\frac{2}{3}\right)^x<1$. Логарифмируя обе части этого неравенства с основанием $2/3$, получаем, что оно равносильно неравенствам: $1>x>0$.

Ответ: $0<x<1$

16. Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причём меньшая окружность проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей окружности в точке P. Хорды AB и AC

пересекают меньшую окружность в точках D и E соответственно.

а) Докажите, что прямые DE и BC параллельны.

б) Пусть Q точка пересечения отрезков DE и AP. Найдите AQ, если радиус большей окружности равен 26, а $BC = 48$.

Решение.

а) Пусть точки O и $S-$ центры большей и меньшей окружностей соответственно, $FA-$диаметр большей окружности, а прямая $l-$ общая касательная к двум данным окружностям, см. рис. 1. Так как оба радиуса OA и SA, проведённые в точку касания, перпендикулярны прямой l, то прямые OA и SA совпадают, поэтому точка S лежит на радиусе OA и, значит, отрезок $OA-$ это диаметр меньшей окружности.

Так как отрезки FA и $OA-$ диаметры большей и меньшей окружностей, то $\angle FBA = 90^\circ$ и $\angle ODA = 90^\circ$. Поэтому прямые FB и OD параллельны. Отсюда по теореме Фалеса получаем, что $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AO}{AF} = \dfrac{1}{2}$.

Абсолютно аналогично (из параллельности прямых OE и FC) получаем, что $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{1}{2}$. Таким образом, $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$. Отсюда по теореме, обратной теореме Фалеса, следует, что прямые DE и BC параллельны, что и требовалось доказать.

рис. 1

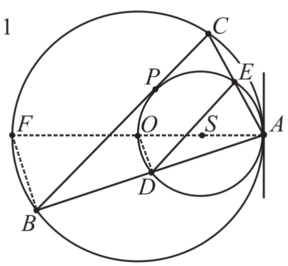
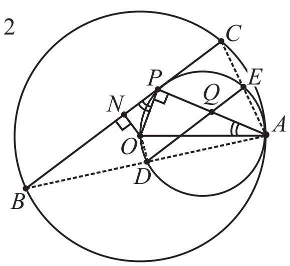


рис. 2



б) В пункте а) было доказано, что прямые DE и BC параллельны, и что $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{1}{2}$. Отсюда по теореме Фалеса получаем, что $\dfrac{AQ}{AP} = \dfrac{1}{2}$, см. рисунок 2. Поэтому для нахождения длины отрезка AQ нам достаточно найти длину отрезка AP.

Пусть $ON-$ перпендикуляр к хорде BC, тогда $N-$ середина хорды BC и, значит, $BN = 24$ (т.к. по условию $BC = 48$). Из прямоугольного треугольника BON находим: $ON = \sqrt{BO^2 - BN^2} = \sqrt{26^2 - 24^2} = 10$.

Так как $OA-$ диаметр меньшей окружности, то $\angle APO = 90^\circ$. Заметим, что поскольку угол между хордой и касательной равен половине дуги, которую он стягивает, то $\angle OPN = \dfrac{1}{2}\overset{\smile}{OP} = \angle OAP$, а из равенства углов $\angle OPN$ и $\angle OAP$ следует, что прямоугольные треугольники OPN и OAP подобны. Поэтому $\dfrac{OP}{OA} = \dfrac{ON}{OP} \Rightarrow OP^2 = ON \cdot OA$. Вспоминая, что $ON = 10$ (это установлено выше), а $OA = 26$ (по условию), получаем: $OP^2 = 10 \cdot 26 = 260$. Из треугольника OAP по теореме Пифагора находим, что $AP^2 = OA^2 - OP^2 = 26^2 - 260 = 26 \cdot (26 - 10) = 26 \cdot 16$. Таким образом, $AP = \sqrt{26 \cdot 16} = 4\sqrt{26}$, $AQ = \dfrac{1}{2}AP = 2\sqrt{26}$.

Ответ: $2\sqrt{26}$

17. Планируется взять кредит 15 января на срок 24 месяца. Условия возврата кредита таковы:

– первого числа каждого месяца долг возрастает на $p\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите p.

Решение.

Величину кредита примем равной 1, тогда общая сумма выплат после полного погашения кредита будет равна 1,3.

Так как долг перед банком по состоянию на 15-ое число каждого месяца должен уменьшиться до нуля равномерно за 24 месяца, то последовательность долгов по состоянию на 15-ое число каждого месяца должна иметь следующий вид: $1, \dfrac{23}{24}, \dfrac{22}{24}, \dfrac{21}{24}, \ldots, \dfrac{1}{24}, 0$.

По условию, первого числа каждого месяца долг возрастает на $p\%$, следовательно, последовательность размеров долга в начале месяца такова: $1 + \dfrac{p}{100}, \dfrac{23}{24}\left(1 + \dfrac{p}{100}\right), \dfrac{22}{24}\left(1 + \dfrac{p}{100}\right), \ldots, \dfrac{1}{24}\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)$. Поэтому выплаты должны быть следующими:

$$1 + \frac{p}{100} - \frac{23}{24}, \frac{23}{24}\left(1 + \frac{p}{100}\right) - \frac{22}{24}, \frac{22}{24}\left(1 + \frac{p}{100}\right) - \frac{21}{24}, \ldots, \frac{1}{24}\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Просуммируем все эти выплаты, сгруппировав слагаемые следующим образом: из каждой выплаты берётся последнее слагаемое, перед которым стоит знак минус, и группируется с первым слагаемым следующей выплаты. В результате такой группировки слагаемых для общей суммы выплат будет получено следующее выражение:

$$1+\frac{p}{100}+\frac{23}{24}\cdot\frac{p}{100}+\frac{22}{24}\cdot\frac{p}{100}+\ldots+\frac{1}{24}\cdot\frac{p}{100}=$$
$$=1+\frac{p}{100}\cdot\left(1+\frac{23}{24}+\frac{22}{24}+\ldots+\frac{1}{24}\right)=$$
$$=1+\frac{p}{100}\cdot\frac{24+23+22+\ldots+1}{24}=$$
$$=1+\frac{p}{100}\cdot\frac{(25\cdot 24)/2}{24}=1+\frac{p}{100}\cdot\frac{25}{2}.$$

Так как общая сумма выплат по условию равна 1,3, то $1+\frac{p}{8}=1{,}3$, откуда $p=0{,}3\cdot 8=2{,}4$.

Ответ: 2,4

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{(y^2-xy+4x-y-12)\cdot\sqrt{x+3}}{\sqrt{9-x}}=0\\ x+y-a=0\end{cases}$$ имеет ровно два решения.

Решение.

Областью определения первого уравнения системы являются те значения x и y, при которых $x+3\geqslant 0$ и $9-x>0$. Поэтому данная в условии система равносильна совокупности следующих двух систем:

$$(1)\begin{cases}x=-3\\ x+y-a=0\end{cases}\quad\text{и}\quad(2)\begin{cases}y^2-xy+4x-y-12=0\\ x+y-a=0\\ -3<x<9.\end{cases}$$

Система (1) при любом значении параметра a имеет решение $x=-3$, $y=a+3$. Поэтому исходная система имеет ровно два решения в том и только том случае, если система (2) имеет единственное решение. Найдём число решений системы (2) при различных значениях параметра. Для этого выразим y через x из второго уравнения этой системы и подставим в первое уравнение: $(a-x)^2-x(a-x)+4x-(a-x)-12=0$, $2x^2-3ax+5x+a^2-a-12=0$, $2x^2-(3a-5)x+a^2-a-12=0$ $(*)$. Уравнение $(*)$ является квадратным относительно неизвестного x, а его дискриминант равен $D=(3a-5)^2-8(a^2-a-12)=a^2-22a+121=$

$=(a-11)^2$. Если $a=11$, то $D=0$ и, значит, уравнение $(*)$ имеет единственный корень: $x=\dfrac{3a-5}{4}=\dfrac{3\cdot 11-5}{4}=7$. Так как при этом неравенства $-3<x<9$ выполнены, то при $a=11$ система (2) имеет единственное решение: $x=7$, $y=a-x=4$. Если же $a\neq 11$, то $D=(a-11)^2>0$ и, значит, уравнение $(*)$ имеет два различных корня:

$$x_1=\frac{3a-5-(a-11)}{4}=\frac{a+3}{2}\quad\text{и}\quad x_2=\frac{3a-5+(a-11)}{4}=a-4.$$

При этом система (2) имеет единственное решение только в том случае, если лишь один из корней $x_1=\dfrac{a+3}{2}$ или $x_2=a-4$ удовлетворяет неравенствам $-3<x<9$. Найдём соответствующие значения a:

$$-3<\frac{a+3}{2}<9\ \Leftrightarrow\ -6<a+3<18\ \Leftrightarrow\ -9<a<15,\ a\in(-9;15);$$
$$-3<a-4<9\ \Leftrightarrow\ 1<a<13,\ a\in(1;13).$$

Отсюда видим, что при $a\in(1;13)$ оба корня x_1 и x_2 удовлетворяют неравенствам $-3<x<9$, т.е. при $a\in(1;13)$ система (2) имеет два решения. Если $a\in(-9;1]$ или $a\in[13;15)$ то неравенствам $-3<x<9$ удовлетворяет только корень x_1, т.е. система (2) имеет единственное решение. Если же $a\leqslant -9$ или $a\geqslant 15$, то для обоих корней x_1 и x_2 неравенства $-3<x<9$ не выполнены, т.е. система (2) решений не имеет.

Рассмотрев все возможные случаи, мы получили, что система (2) имеет единственное решение (соответственно, исходная система имеет ровно два решения) при $a=11$, $a\in(-9;1]$ и $a\in[13;15)$.

Ответ: $a\in(-9;1]\cup\{11\}\cup[13;15)$.

19. Ученики школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 30 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 4 балла, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?

б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 40, средний балл участников, сдавших тест, составил 52, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 24. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 50, а не сдавших тест — 26. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

Решение.

а) Да, могло. Например, если тест писали 30 человек, из которых 10 человек набрали по 16 баллов, 10 человек набрали по 26 баллов, а оставшиеся 10 человек — по 40 баллов, то первоначально количество не сдавших тест было равно 20, а их средний балл был равен $\frac{10\cdot(16+26)}{20}=21$. Тогда, после добавления всем участникам по 4 балла, не сдавшими тест окажутся лишь те участники, у которых первоначально было по 16 баллов, при этом их новый средний балл будет равен 20, что меньше, чем 21.

б) Да, могло. Возьмём пример, приведённый в пункте а). В этом примере после добавления баллов всем участникам средний балл не сдавших тест понизился. Но и средний балл сдавших тест тоже понизился: первоначально средний балл сдавших тест был равен 40, а после добавления всем участникам по 4 балла, в категорию сдавших тест попадут также те участники, у которых первоначально было 26 баллов, при этом новый средний балл сдавших тест оказывается равен $\frac{10\cdot(30+44)}{20}=37$, что меньше 40. Таким образом, пример, приведённый в пункте а), даёт также положительный ответ и на вопрос пункта б).

в) Пусть k — число участников теста, n_1 — число сдавших тест первоначально, n_2 — число сдавших тест после добавления 4 баллов. Так как по условию первоначально средний балл участников теста составил 40, то сумма первоначальная сумма баллов всех участников равна $40k$. Из условия также следует, что первоначально сумма баллов участников, сдавших тест, равна $52n_1$. Число участников, не сдавших тест первоначально, равно $k-n_1$, а сумма их баллов равна $24(k-n_1)$. А поскольку сумма баллов всех участников равна сумме баллов участников сдавших тест плюс сумма баллов участников, не сдавших тест, то $40k=52n_1+24(k-n_1)$.

После добавления всем участникам по 4 балла средний балл всех участников станет равен 44, а сумма баллов всех участников будет равна $44k$. Так как после добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 50, а не сдавших тест — 26, то сумма баллов участников, сдавших тест, будет равна $50n_2$, а сумма баллов не сдавших тест — $26(k-n_2)$. Следовательно, $44k=50n_2+26(k-n_2)$.

Итак, числа k, n_1, n_2 должны удовлетворять следующим соотношениям: $\begin{cases} 40k=52n_1+24(k-n_1) \\ 44k=50n_2+26(k-n_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16k=28n_1 \\ 18k=24n_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k=7n_1 \\ 3k=4n_2 \end{cases} (*)$.

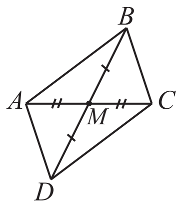
Из равенства $4k=7n_1$ следует, что число k делится на 7, а из равенства $3k=4n_2$ следует, что число k делится на 4. А из делимости числа k на 7 и на 4 следует, что k делится на 28. Наименьшим натуральным числом, деляшимся на 28, является само число 28, поэтому $k\geqslant 28$.

Приведём пример, который показывает, что при числе участников теста, равном 28, распределение средних баллов могло быть таким, как указано в условии пункта в) (т.е. нижняя оценка $k=28$ действительно достижима). Пусть из 28 участников теста первоначально 7 человек набрали по 22 балла, 4 человека набрали по 27 баллов, 1 человек набрал 26 баллов и 16 человек набрали по 52 балла. Тогда для введёных выше чисел k, n_1, n_2 имеем: $k=28$, $n_1=16$, $n_2=21$ (после добавления 4 баллов в категорию сдавших тест переходят участники, набравшие первоначально по 27 и 26 баллов — всего 5 человек). Легко видеть, что при таких значениях k, n_1, n_2 система $(*)$ выполнена. Также без труда проверяется, что первоначально средний балл всех участников равен 40 : сумма баллов всех участников равна $7\cdot22+4\cdot27+26+16\cdot52=1120=40\cdot28$. Далее: средний балл участников, первоначально сдавших тест, равен 52 (первоначально сдали тест только те участники, которые набрали по 52 балла), а средний балл участников, сдавших тест после добавления 4 баллов, равен $\frac{16\cdot56+4\cdot31+30}{21}=\frac{1050}{21}=50$. Остаётся лишь заметить, что поскольку в приведённом примере распределения баллов участников для чисел k, n_1, n_2 выполнена система $(*)$ и выполнены условия пункта в) по среднему баллу всех участников, а также средним баллам участников, сдавших тест первоначально и сдавших тест после добавления баллов, то условия пункта в) по средним баллам участников, не сдавших тест первоначально и не сдавших тест после добавления баллов, будут выполняться автоматически (впрочем, это легко проверить и непосредственно).

Ответ: а) да; б) да; в) 28.

Указания к задачам №16 тестов с чётными номерами

Тест №6. а) Отложим на луче BM от точки M отрезок MD, равный отрезку BM, см. рисунок.



Четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом (т.к. его диагонали делятся точкой пополам). Поэтому $CD = AB$. Пусть $\angle ABC = \beta$. Тогда $\angle BCD = 180^\circ - \beta$. Применим теорему косинусов к треугольникам BCD и ABC: $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos(180^\circ - \beta) =$

$$= BC^2 + AB^2 + 2BC \cdot AB \cdot \cos\beta \ \ (1);$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\beta \ \ (2).$$

Так как правая часть равенства (1) больше, чем правая часть равенства (2), то $BD > AC$. А поскольку $BD = 2BM$, то $BM > \frac{1}{2} AC$, ч.т.д.

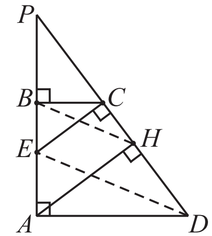
б) Зная BD, AB и BC, из равенства (1) находим $\cos\beta$, а затем вычисляем $\sin\beta$.

Тест №8. а) Отрезки CB и AH — высоты прямоугольных треугольников PCE и PAD, поэтому

$$PB \cdot PE = PC^2 \ (1) \quad \text{и} \quad PH \cdot PD = PA^2 \ (2).$$

Нам требуется доказать параллельность BH и DE, что равносильно равенству $\frac{PB}{PE} = \frac{PH}{PD}$. Чтобы перейти от произведений $PB \cdot PE$ и $PH \cdot PD$, являющихся левыми частями равенств (1) и (2), к отношениям $\frac{PB}{PE}$ и $\frac{PH}{PD}$, разделим обе части равенств (1) и (2) на PE^2 и PD^2 соответственно. При этом получим равенства $\frac{PB}{PE} = \frac{PC^2}{PE^2}$ и $\frac{PH}{PD} = \frac{PA^2}{PD^2}$. Но $\frac{PC}{PE} = \cos\angle APD$ и $\frac{PA}{PD} = \cos\angle APD$, следовательно, $\frac{PB}{PE} = \frac{PH}{PD}$, что и требовалось доказать.

б) Так как BH и DE параллельны, то треугольник BPH подобен треугольнику EPD с коэффициентом подобия $\frac{PB}{PE} = \left(\frac{PC}{PE}\right)^2 = (\cos\angle APD)^2$, см. пункт а). Отсюда для искомой площади треугольника BPH имеем:

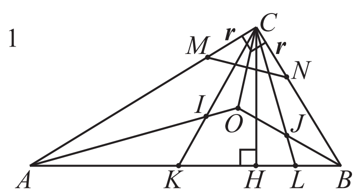


$S_{BPH} = S_{EPD} \cdot (\cos\angle APD)^4$ (отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия). Покажите, что $\cos\angle APD = \frac{AB}{CD} = 0{,}6$ ($AB : CD = 3 : 5$ — по условию). $S_{EPD} = \frac{1}{2} PE \cdot AD$ (AD — высота треугольника EPD). Длину отрезка PE проще всего найти из равенства (1), приведённого в пункте а): $PE = \frac{PC^2}{PB}$. Найдите длины отрезков PC и PB из прямоугольного треугольника BPC, в котором известен катет BC и косинус угла BPC, и вычислите сначала S_{EPD}, а затем S_{BPH}.

Тест №10. а) Для доказательства того, что четырёхугольник $IMNJ$ — параллелограмм, нам достаточно доказать, что отрезки MN, IJ равны и лежат на параллельных прямых. Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC, а r — радиус этой окружности, см. рис. 1.

Так как $\angle ACB = 90^\circ$, то четырёхугольник $OMCN$ — квадрат со стороной, равной r. Поэтому $MN \perp CO$ и $MN = r\sqrt{2}$.

рис. 1



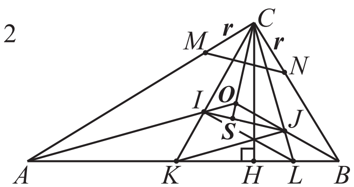
Центр вписанной окружности является точкой пересечения биссектрис, поэтому точка O — это точка пересечения прямых AI и BJ. А поскольку $AI \perp CL$ и $BJ \perp CK$ (что доказано в решении задачи 16 теста №9), то точка O является также точкой пересечения высот треугольника CIJ. Поэтому $CO \perp IJ$.

Из перпендикулярности пар прямых MN, CO и IJ, CO следует, что прямые MN и IJ параллельны. Остаётся лишь доказать, что $IJ = MN$.

Для этого заметим, что $IJ = KL \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = (AC + BC - AB) \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ — это равенство было доказано в решении пункта б) задачи 16 теста №9. Остаётся лишь вспомнить, что $r = \dfrac{AC + BC - AB}{2}$ – формула радиуса вписанной окружности прямоугольного треугольника, откуда получаем: $AC + BC - AB = 2r,\ IJ = 2r \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = r\sqrt{2}$. Выше было показано (см. первый абзац), что $MN = r\sqrt{2}$, поэтому $IJ = MN$, что завершает доказательство.

б) Пусть S – точка пересечения прямых CO и IJ, см. рис. 2.

рис. 2



Так как $CO \perp IJ$ (это доказано в пункте а), то высота параллелограмма $IMNJ$ составлена из двух отрезков – отрезка SO и отрезка, соединяющего точку O с центром квадрата $OMCN$. Поэтому высота h параллелограмма $IMNJ$ равна $h = OS + \dfrac{r}{\sqrt{2}}$, а его площадь, которую нам требуется найти, равна
$$S_{IMNJ} = h \cdot MN = \left(OS + \frac{r}{\sqrt{2}}\right) \cdot r\sqrt{2} = OS \cdot r\sqrt{2} + r^2.$$
Таким образом, нам достаточно найти длину отрезка OS.

Покажем, что треугольник OIJ подобен треугольнику OBA. Для этого заметим, что прямые AO и KJ параллельны, см. пункт а) задачи 16 теста №9. Поэтому $\angle OIJ = \angle IJK$. В решении пункта а) задачи 16 теста №9 было установлено, что $KJ \perp CL$ и $LI \perp CK$, поэтому точки K, I, J, L лежат на окружности, диаметром которой является отрезок KL. Отсюда следует, что $\angle IJK = \angle ILK$ (как углы, опирающиеся на одну дугу). А поскольку прямые BO и LI параллельны, снова см. пункт а) задачи 16 теста №9, то $\angle ILK = \angle OBA$. Итак, $\angle OIJ = \angle IJK = \angle ILK = \angle OBA$, т.е. $\angle OIJ = \angle OBA$, и, значит, треугольники OIJ и OBA подобны по двум равным углам ($\angle AOB$ – общий угол этих треугольников).

Отрезок OS – высота треугольника OIJ, а высотой треугольника OBA является радиус вписанной окружности $\triangle ABC$, проведённый из точки O в точку касания со стороной AB. Отсюда, опираясь на подобие треугольников OIJ и OBA, получаем, что $\dfrac{OS}{r} = \dfrac{IJ}{AB}$ (отношение соответствующих сторон подобных треугольников равно отношению проведённых к ним высот). Таким образом, $OS = r \cdot \dfrac{IJ}{AB} = \dfrac{r^2\sqrt{2}}{AB}$. Подставляя найденное для OS выражение в формулу $S_{IMNJ} = OS \cdot r\sqrt{2} + r^2$, окончательно получаем $S_{IMNJ} = \dfrac{2r^3}{AB} + r^2$.

Тест №12. а) Заметим, что параллельность прямых B_1L и AA_1 равносильна равенству отрезков AB_1 и A_1L, см. рис. 1: если $AB_1 = A_1L$, то равны дуги, стягивающие эти отрезки, поэтому $\angle B_1LA = \angle A_1AL$ (как углы, опирающиеся на равные углы) и, значит, прямые B_1L и AA_1 параллельны.

рис. 1

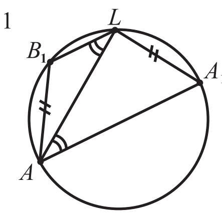
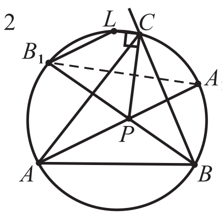


рис. 2



Так как BB_1 – биссектриса угла B, то $AB_1 = B_1C$ (отрезки AB_1 и B_1C стягивают равные дуги, и поэтому они равны). Поэтому равенство $AB_1 = A_1L$ равносильно равенству $B_1C = A_1L$. Чтобы доказать равенство $B_1C = A_1L$, заметим, что прямая CL перпендикулярна прямой CP: CP – биссектриса внутреннего угла при вершине C, а CL – биссектриса внешнего угла, поэтому $\angle PCL = \dfrac{1}{2}\angle C + \dfrac{1}{2}(180^\circ - \angle C) = 90^\circ$. В задаче 16 теста №11 было доказано, что $CP \perp A_1B_1$. Из перпендикуляросити прямых CL и CP и перпендикулярности прямых A_1B_1 и CP следует, что прямые A_1B_1 и CL параллельны. Трапеция A_1CLB_1 вписана в окружность и поэтому является равнобокой. Значит, отрезки B_1C и A_1L – диагонали равнобокой трапеции, поэтому $B_1C = A_1L$, что и требовалось доказать.

б) В пункте а) было доказано, что $A_1L = AB_1$. Длину отрезка AB_1 выразим из $\triangle AB_1B$ по теореме синусов: $AB_1 = 2R \cdot \sin\angle B_1BA =$ $= 2R \cdot \sin\left(\dfrac{1}{2}\angle B\right) = 2R \cdot \sin 30^\circ = R$. Чтобы найти R, применим теорему синусов к $\triangle ABC$: $R = \dfrac{AB}{2\sin\angle ACB}$, $\angle ACB = 180^\circ - \angle A - \angle B = 70^\circ$, $R = \dfrac{4}{2\sin 70^\circ} = \dfrac{2}{\sin 70^\circ}$.

Тест № 14. а) Пусть точка O_1 — центр вписанной в трапецию окружности, а точка O_2 — центр окружности, которая касается вписанной окружности и касается сторон AD и CD. Тогда прямая O_1O_2 совпадает с биссектрисой угла ADC. Пусть также K — точка пересечения прямой O_1O_2 с прямой BC, см. рисунок 1.

Так как прямые BC и AD параллельны, то $\angle BKP = \angle ADP$, поэтому $\angle CKD = \angle BKP = \angle ADP = \angle CDK$. Отсюда следует, что треугольник CDK равнобедренный, $CK = CD$. Теперь для доказательства равенства $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{AD}{BC}$ достаточно заметить, что $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{AD}{BK}$ (это следует из подобия $\triangle ADP$ и $\triangle BKP$), и что $BK = BC$ (а это следует из доказанного выше равенства $CK = CD$ и условия $CD = 2BC$).

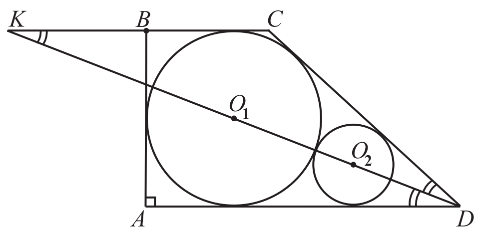


Рис. 1

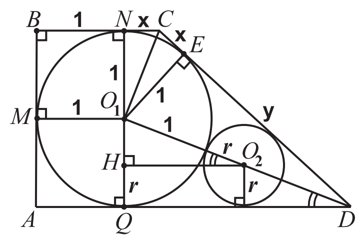


Рис. 2

б) Пусть M, N, E, Q — точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, CD и AD соответственно, и пусть $CE = x, DE = y$, а r — искомый радиус, см. рисунок 2. Тогда $CN = CE = x$, $BN = O_1M = 1$ и из условия $CD = 2BC$ получаем: $x + y = 2\cdot(1 + x)$, $y = x + 2$. Покажем, что $\angle CO_1D = 90^\circ$: в самом деле, т.к. $\angle O_1CD = \dfrac{1}{2}\angle C$ и $\angle O_1DC = \dfrac{1}{2}\angle D$, то $\angle O_1CD + \angle O_1DC = \dfrac{1}{2}(\angle C + \angle D) = 90^\circ$. Следовательно, O_1E — высота прямоугольного треугольника CO_1D, поэтому $CE\cdot DE = O_1E^2$, откуда $xy = 1$. Решая систему $\begin{cases} y = x + 2 \\ xy = 1, \end{cases}$ находим, что $x = \sqrt{2} - 1$, $y = \sqrt{2} + 1$.

Пусть $\angle O_1DQ = \alpha$, и пусть H — проекция точки O_2 на радиус O_1Q. Тогда из треугольника O_1O_2H имеем: $\sin\alpha = \dfrac{O_1H}{O_1O_2} = \dfrac{1-r}{1+r}$, откуда $r = \dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$. Заметим, что поскольку $\operatorname{ctg}\alpha = DQ/O_1Q = y = \sqrt{2} - 1$, то $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \dfrac{1}{1+(\sqrt{2}-1)^2}$. Выразив из этого равенства $\sin\alpha$

и подставив в равенство $r = \dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$, после упрощающих преобразований, получим ответ.

Тест № 16. а) По свойству касательной $BP^2 = AB\cdot BD$, см. рисунок 1. В решении пункта а) задачи предыдущего варианта было доказано, что $AD = \dfrac{1}{2}AB$. Поэтому $BD = \dfrac{1}{2}AB$ и, значит, $BP^2 = \dfrac{1}{2}AB^2$, $\dfrac{BP}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Абсолютно аналогично (из равенства $CP^2 = AC\cdot CE$) доказывается, что $\dfrac{CP}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

рис. 1

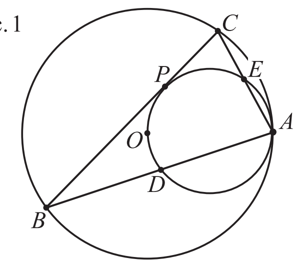
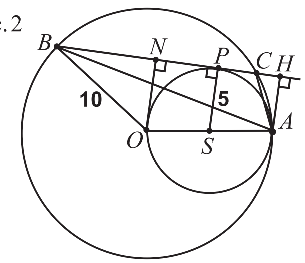


рис. 2



б) Повторите в обратном порядке выкладки из решения пункта б) задачи предыдущего варианта. При этом из условий $AO = 10$, $AQ = \sqrt{10}$ получится, что $ON = 6$, $BC = 16$. Пусть AH — высота к стороне BC треугольника ABC. Тогда радиус PS меньшей окружности является средней линией трапеции $OAHN$, см. рисунок 2. Поэтому $PS = \dfrac{1}{2}(ON + AH)$. Подставляя в это равенство $PS = 5$ и $ON = 6$, получаем, что $AH = 4$. Таким образом, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC\cdot AH = \dfrac{1}{2}\cdot 16\cdot 4 = 32$.

Указания к задачам №19 тестов с чётными номерами

Тест №4. а) Если на доске написаны 40 подряд идущих нечётных чисел (т.е. чисел вида $2k+1$, где $0 \leqslant k \leqslant 39$) и первые восемь подряд идущих чисел, кратных 8, то сумма всех 48 чисел равна $1+3+\ldots+79+8\cdot(1+2+\ldots+8)=\dfrac{1+79}{2}\cdot 40+8\cdot 36=1600+288=1888$. Так как по условию сумма написанных на доске чисел должна быть равна 1918, то взяв вместо числа 79 число $79+30=109$, мы получим пример, показывающий, что на доске может быть ровно 40 нечётных чисел.

б) Если на доске ровно четыре числа, кратных 8, то остальные 44 числа являются нечётными. При этом сумма всех написанных на доске чисел будет не меньше, чем $1+3+\ldots+87+8\cdot(1+2+3+4)=\dfrac{1+87}{2}\cdot 44+80=44^2+80=1936+80=2016$. А это противоречит тому, что сумма всех написанных чисел равна 1918. Поэтому ровно четыре числа, кратных 8, на доске быть не может.

в) Проведя оценку снизу суммы всех написанных на доске чисел (аналогично тому, как это сделано в пункте б), покажите, что ровно шесть чисел, кратных 8, на доске быть не может.

Заметим, что количество чисел, кратных 8, обязательно чётно. Иначе количество нечётных чисел на доске будет нечётным, и сумма всех написанных на доске чисел будет нечётна, а это противоречит тому, что она равна 1918. Следовательно, на доске не может быть меньше восьми чисел, кратных 8. Пример пункта а) показывает, что на доске может быть ровно восемь чисел, кратных 8. Таким образом, наименьшее количество чисел, кратных 8, равно 8.

Тест №6. а) Например, если 12 студентов писали обе контрольные работы и получили по 20 баллов за каждую, а из остальных 16 студентов восемь писали только 1-ую работу, получив в сумме 60 баллов на всех, другие восемь писали только 2-ую работу, также получив в сумме 60 баллов на всех, то средний балл по каждой из работ в отдельности равен $\dfrac{20\cdot 12+60}{20}=15$. При этом S равно $\dfrac{20\cdot 12+60+60}{28}=\dfrac{90}{7}<16$.

б) Пусть Σ_1- сумма баллов студентов, писавших только одну контрольную, Σ_M- сумма наибольших баллов студентов, писавших обе работы, Σ_m- сумма наименьших баллов этих студентов, S_1 и S_2- сумма всех баллов по 1-ой и 2-ой работам соответственно, $k-$ число студентов, писавших обе работы, n_1 и n_2- число студентов, писавших только первую и только вторую работы соответственно. Тогда аналогично решению задачи 19 теста №1 имеем: $S=\dfrac{15\cdot(28+k)-\Sigma_m}{28}\geqslant\dfrac{420-5k}{28}$ (т.к. $\Sigma_m\leqslant 20k$). Из этого неравенства при $S=10$ получаем: $\dfrac{420-5k}{28}\leqslant 10$, $k\geqslant 28$. Но это возможно только в том случае, если обе работы писали все 28 человек, а при этом окажется, что $S\geqslant 15$ (т.к. при $k=28$ имеем: $n_1=n_2=0$, $\Sigma_1=0$, $S=\dfrac{\Sigma_M}{28}\geqslant\dfrac{S_1}{28}=15$). Значит, случай $S=10$ невозможен.

в) Если $k=18$, то аналогично решению задачи 19 теста №1 имеем:

$$S=\frac{15\cdot(28+k)-\Sigma_m}{28}=\frac{690-\Sigma_m}{28}.$$ А поскольку $\Sigma_m\leqslant 20\cdot 18$,

то $S\geqslant\dfrac{690-360}{28}=\dfrac{330}{28}$. Однако попытка привести такой пример, при котором $S=\dfrac{330}{28}$, окажется безуспешной. Докажем, что имеет место более сильная оценка: $S\geqslant\dfrac{345}{28}$.

Если 18 человек писали обе работы, то 10 человек писали только одну из работ, т.е. $n_1+n_2=10$. Поэтому либо $n_1\leqslant 5$, либо $n_2\leqslant 5$. Пусть $n_1\leqslant 5$. Тогда число всех студентов, писавших первую работу, не больше, чем $18+5=23$, а сумма всех баллов по первой работе не больше, чем $23\cdot 15=345$, т.е. $S_1\leqslant 345$. Заметим, что $\Sigma_m\leqslant S_1$ (т.к. в сумму баллов по 1-ой контрольной входят баллы всех 18 человек, писавших обе работы). А поскольку $S_1\leqslant 345$, то $\Sigma_m\leqslant 345$. Отсюда для величины S получаем: $S=\dfrac{690-\Sigma_m}{28}\geqslant\dfrac{690-345}{28}=\dfrac{345}{28}$.

Чтобы привести пример, показывающий достижимость нижней границы в оценке $S\geqslant\dfrac{345}{28}$, будем считать, что из 18 студентов, писавших обе работы, 15 человек набрали по 19 баллов за каждую из работ и 3 человека набрали по 20 баллов за каждую работу, а из остальных 10 студентов 5 человек писали только 1-ую работу, набрав по нуль баллов, и 5 человек писали только 2-ую работу, также набрав по нуль баллов. Тогда $S_1=S_2=15\cdot 19+3\cdot 20=345$, $\Sigma_m=345$, $S=\dfrac{690-\Sigma_m}{28}=\dfrac{345}{28}$.

Тест №8. а) $100+199=299$, $101+198=299$, $\ldots$ $149+150=299$ — множество $\{100;101;\ldots 199\}$ разбивается на 50 пар чисел с суммой чисел 299 для каждой пары, поэтому его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел, включив любые 25 из этих пар в одно подмножество, а все оставшиеся – в другое подмножество.

б) Заметим, что множество $\{2^{100}; 2^{101}; \ldots 2^{199}\}$ и множество $\{1; 2; \ldots 2^{99}\}$, полученное делением всех чисел первого множества на 2^{100}, одновременно или являются хорошими, или не являются таковыми. Далее заметим, что $1+2+\ldots+2^{98}=2^{99}-1<2^{99}$, поэтому множество $\{1; 2; \ldots 2^{99}\}$ нельзя разбить на два подмножества с равной суммой чисел (подмножество, содержащее 2^{99}, обязательно будет иметь бо́льшую сумму чисел, чем то подмножество, которое это число не содержит). Значит, множество $\{1; 2; \ldots 2^{99}\}$, а вместе с ним и множество $\{2^{100}; 2^{101}; \ldots 2^{199}\}$, не является хорошим.

в) Пусть $\{a; b; c; d\}$ – какое-либо множество, состоящее из четырёх чисел, упорядоченных по возрастанию, т.е. $a < b < c < d$. Заметим, что это множество является хорошим только в двух случаях: либо $d = a + b + c$, либо $b + c = a + d$.

Рассмотрим 1-ый случай. Легко видеть, что в множестве $\{1; 4; 8; 13; 15; 17; 19; 21\}$ можно только одним способом выбрать четыре числа так, чтобы одно было суммой трёх других: это числа $1, 4, 8$ и 13.

Рассмотрим 2-ой случай. Так как данное в условии множество содержит только два чётных числа – 4 и 8, то для любого его четырёхэлементного подмножества $\{a; b; c; d\}$ условие $b + c = a + d$ может выполняться только в том случае, если оба числа 4 и 8 одновременно либо входят в подмножество $\{a; b; c; d\}$, либо не входят в него (иначе левая и правая части равенства $b + c = a + d$ будут иметь разную чётность).

Если числа 4 и 8 входят в подмножество $\{a; b; c; d\}$, то $a = 4$, $b = 8$, и, значит, $d - c = b - a = 4$ (для случая $a = 1$, $b = 4$, $c = 8$ равенство $b + c = a + d$ не может быть выполнено, т.к. $d \geqslant 13$). Парами чисел c, d, разность которых $d - c$ равна 4, являются следующие пары: $c = 13$, $d = 17$; $c = 15$, $d = 19$; $c = 17$, $d = 21$. Таким образом, все хорошие подмножества $\{a; b; c; d\}$, в которые входят числа 4 и 8, исчерпываются тремя подмножествами: $\{4; 8; 13; 17\}$, $\{4; 8; 15; 19\}$ и $\{4; 8; 17; 21\}$.

Если же числа 4 и 8 не входят в подмножество $\{a; b; c; d\}$, то числа a, b, c, d – это какие-то из чисел $13, 15, 17, 19, 21$ (если $a = 1$, то равенство $d - c = b - a$ выполняться не будет, т.к. $d - c \leqslant 21 - 13 = 8$, а $b - a \geqslant 13 - 1 = 12$). Исключая из пятёрки чисел $13, 15, 17, 19, 21$ поочерёдно одно из чисел, начиная с числа 13 и заканчивая числом 21, получаем, что равенство $d - c = b - a$ выполняется для следующих четвёрок чисел: $\{15; 17; 19; 21\}$, $\{13; 15; 19; 21\}$, $\{13; 15; 17; 19\}$.

Итак, всего у множества $\{1; 4; 8; 13; 15; 17; 19; 21\}$ имеется 7 хороших четырёхэлементных подмножеств: подмножество $\{1; 4; 8; 13\}$ и шесть подмножеств вида $\{a; b; c; d \mid a + d = b + c\}$, (три из которых содержат числа 4 и 8 и три из которых состоят только из нечётных чисел).

Тест №10. а) Пару чисел, написанных на доске, будем записывать в скобках, указывая первым меньшее из чисел, если только они не равны. Укажем последовательность ходов, в результате которых из пары $(3; 5)$ получится пара $(73; 75)$: $(3; 5) \to (9; 9) \to (17; 19) \to (37; 37) \to (73; 75)$.

б) Аналогично решению пункта б) задачи 19 теста №19 покажите, что после 4-го хода наименьшее из возможных чисел, написанных на доске, равно 33. Так как при первых 4-х ходах число 35 на доске не появляется (проверьте это), а после 5-го хода наименьшее из возможных чисел, написанных на доске, равно $2 \cdot 33 - 1 = 65$, то число 35 появиться на доске не может.

в) Используя то, что разность между первоначально написанными на доске числами больше 1, покажите, что после каждого хода разность между большим и меньшим из написанных на доске чисел либо уменьшается на 2, либо увеличивается на 2.

Первоначально разность между написанными числами равна 2. После 1-го хода разность между числами будет равна либо 0, либо 4, т.е. будет делиться на 4, а после 2-го хода разность между числами при делении на 4 будет давать в остатке 2. Отсюда видим, что после каждого чётного хода разность между большим и меньшим из чисел имеет вид $4k+2$, где $k \geqslant 0$, а после каждого нечётного хода эта разность имеет вид $4k$, где $k \geqslant 0$. Поэтому после 2017-го хода разность между числами будет иметь вид $4k$, а поскольку она не равна нулю (т.к. по условию числа, полученные после 2017-го хода, различны), то $k \geqslant 1$ и, значит, разность между числами не меньше 4.

Тест №12. а) Так как $\dfrac{643 \cdot 6}{160 \cdot 6} = \dfrac{3858}{960} = \dfrac{3858}{3 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 8}$, то число $n = 3858$ подходит.

б) Предположим, что существует такое четырёхзначное число n, что $f(n) = \dfrac{343}{160}$, и пусть a, b, c, d – его цифры, начиная с первой. Тогда

$$\frac{n}{a \cdot b \cdot c \cdot d} = \frac{343}{160},\quad 160n = 343\, a \cdot b \cdot c \cdot d \Rightarrow a \cdot b \cdot c \cdot d \text{ делится на } 160.$$

Так как $160 = 16 \cdot 10 = 2^4 \cdot 2 \cdot 5 = 2^5 \cdot 5$, то $a \cdot b \cdot c \cdot d$ делится на 2^5 и делится на 5. Следовательно, одна из цифр a, b, c, d равна 5, а произведение трёх других цифр содержит в своём разложении на простые множители 2^5. Это возможно только в том случае, если по крайней мере две из цифр чётны. Поэтому $a\cdot b\cdot c\cdot d\leqslant 5\cdot 8\cdot 8\cdot 9=160\cdot 18$ (одна из цифр a,b,c,d равна 5, две цифры чётны, а максимальная чётная цифра – это 8). Таким образом, $160\cdot n=343\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d\leqslant 343\cdot 160\cdot 18$ и, значит, $n\leqslant 343\cdot 18$. С другой стороны, из равенства $\dfrac{n}{a\cdot b\cdot c\cdot d}=\dfrac{343}{160}$ следует, что $n=343\cdot m$. Из неравенства $n\leqslant 343\cdot 18$ получаем, что $m\leqslant 18$, а поскольку n – четырёхзначное число, то $m\geqslant 4$.

Проверим выполнение равенства $f(n)=\dfrac{343}{160}$ для каждого из чисел $n=343\cdot m$, где $4\leqslant m\leqslant 18$. При этом будем использовать установленный выше факт – одна из цифр числа n должна быть равна 5, а из трёх других цифр по крайней мере две должны быть чётны. Из всех чисел вида $343\cdot m$, где $4\leqslant m\leqslant 18$ только при $m=6$, $m=13$ и $m=16$ получаем числа, удовлетворяющие этому условию: $343\cdot 6=2058$, $343\cdot 13=4459$, $343\cdot 16=5488$ (проверьте это вычислениями). Но 1-ое из этих чисел содержит в своей записи цифру 0, произведение цифр 2-го числа не кратно 160, а для 3-го числа дробь $f(n)$ имеет вид $\dfrac{5488}{5\cdot 4\cdot 8\cdot 8}=\dfrac{343\cdot 16}{5\cdot 4\cdot 8\cdot 8}=\dfrac{343}{80}$, т.е. также не удовлетворяет условию.

в) Пусть n – одно из четырёхзначных чисел, для которых $f(n)=\dfrac{p}{160}$ – несократимая дробь, и пусть a,b,c,d – цифры числа n, начиная с первой. Тогда $f(n)=\dfrac{n}{a\cdot b\cdot c\cdot d}=\dfrac{p}{160}$, $160n=p\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d$, и аналогично решению пункта б) получаем, что среди цифр a,b,c,d обязательно присутствует цифра 5 и какие-то две цифры чётны. Рассмотрим сначала тот случай, когда среди цифр a,b,c,d ровно две чётны, а оставшаяся цифра нечётна. Поскольку $a\cdot b\cdot c\cdot d$ должно делиться на 2^5, то одна из этих чётных цифр равна 8, а другая – 4 или 8 (иначе в разложении числа $a\cdot b\cdot c\cdot d$ на простые множители не наберётся пятая степень числа 2). Итак, в рассматриваемом случае три цифры числа n это $5,4,8$ или $5,8,8$. Для оставшейся нечётной цифры имеется пять возможностей: $1,3,5,7,9$. Рассмотрим поочерёдно все эти возможности: если оставшаяся цифра равна 3 или 9, то из равенства $160n=p\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d$ следует, что n кратно 3 или 9, соответственно. Если три цифры числа n это $5,4,8$, а четвёртая – 3 или 9, то число n не кратно 3, поскольку сумма цифр n не будет делиться на 3 (признак делимости на 3), т.е. эти случаи невозможны. Если же три цифры n это $5,8,8$, то при четвёртой цифре, равной 9, не выполнен признак делимости на 9 ($5+8+8+9=30$ не делится на 9), т.е. этот случай

невозможен, а при четвёртой цифре, равной 3, наименьшей несократимой дробью $f(n)$ со знаменателем 160 является $f(3858)=\dfrac{3858}{3\cdot 8\cdot 5\cdot 8}=\dfrac{643}{160}$ – дробь, данная в условии пункта а).

Продолжим поиск наименьшей дроби, рассматривая в качестве четвёртой цифры $1,5$ и 7. Если три из цифр равны $5,4,8$, а четвёртая цифра равна 1, то единственной возможностью, при которой дробь $f(n)$ равна несократимой дроби со знаменателем 160, является тот случай, когда цифра 1 является последней цифрой числа n: в самом деле, если последняя цифра n чётна или равна 5, то можно произвести сокращение дроби $f(n)=\dfrac{n}{1\cdot 5\cdot 4\cdot 8}$ и знаменатель окажется меньше 160. Если n состоит из цифр $5,4,8$ и 1, причём 1 – последняя цифра n, то наименьшее значение $f(n)$ достигается для $n=4581$: $f(n)=\dfrac{4581}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 1}=\dfrac{4581}{160}$ – это гораздо больше, чем найденное выше значение $\dfrac{643}{160}$.

Рассмотрите аналогично оставшиеся пять случаев для цифр числа n:

1) $5,8,8,1$; 2) $5,4,8,5$; 3) $5,8,8,5$; 4) $5,4,8,7$; 5) $5,8,8,7$.

Покажите, что в случаях 3) и 5) среди чисел $f(n)$ нет несократимых дробей со знаменателем 160, в случае 4) единственной несократимой дробью $f(n)$ со знаменателем 160 является $f(8547)=\dfrac{8547}{8\cdot 5\cdot 4\cdot 7}=\dfrac{1221}{160}$, а в случаях 1) и 2) наименьшие несократимые дроби со знаменателем 160 равны $f(1858)=\dfrac{1858}{1\cdot 8\cdot 5\cdot 8}=\dfrac{929}{160}$ и $f(4585)=\dfrac{4585}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 5}=\dfrac{917}{160}$.

Итак, в том случае, когда ровно две из цифр числа n чётны, наименьшей дробью $f(n)$, равной несократимой дроби со знаменателем 160, является данная в условии пункта а) дробь $\dfrac{643}{160}$.

Остаётся рассмотреть тот случай, когда среди цифр числа n одна равна 5, а другие три чётны. Заметим, что цифра 5 не может быть последней в числе n, иначе дробь $f(n)=\dfrac{n}{a\cdot b\cdot c\cdot d}$ можно сократить на 5, т.е. $f(n)$ не будет равна несократимой дроби со знаменателем 160. Следовательно, последняя цифра числа n чётна, и дробь $\dfrac{n}{a\cdot b\cdot c\cdot d}$ можно сократить минимум на 2. Поэтому равенство $\dfrac{n}{a\cdot b\cdot c\cdot d}=\dfrac{p}{160}$, где дробь $\dfrac{p}{160}$ несократима, возможно лишь в том случае, если $a\cdot b\cdot c\cdot d$ кратно 2^6.

Если среди чётных цифр числа n нет ни одной цифры 8, то все три чётных цифры должны быть равны 4 (иначе $a\cdot b\cdot c\cdot d$ не кратно 2^6).

В этом случае единственной несократимой дробью со знаменателем 160 является $f(4454)=\dfrac{4454}{4\cdot4\cdot5\cdot4}=\dfrac{2227}{160}>\dfrac{643}{160}$.

Если среди чётных цифр n лишь одна равна 8, то другая из цифр обязательно равна 4, и для цифр числа n имеются следующие три возможности: $5, 8, 4, 2$; $5, 8, 4, 4$; $5, 8, 4, 6$. Покажите, что в первых двух случаях наименьшие несократимые дроби со знаменателем 160 равны $f(2458)=\dfrac{1229}{160}$ и $f(4548)=\dfrac{1137}{160}$ соответственно, а в третьем случае среди $f(n)$ вообще нет несократимых дробей со знаменателем 160.

Если же среди цифр числа более одной цифры равны 8, то для них имеются следующие возможности: $5, 8, 8, 2$; $5, 8, 8, 4$; $5, 8, 8, 6$; $5, 8, 8, 8$. Покажите, что в первых трёх случаях наименьшие несократимые дроби со знаменателем 160 равны $f(2588)=\dfrac{647}{160}$, $f(5848)=\dfrac{731}{160}$ и $f(5868)=\dfrac{5868}{5\cdot8\cdot6\cdot8}=\dfrac{489\cdot12}{160\cdot12}=\dfrac{489}{160}$ – самая маленькая из найденных дробей. В четвёртом же случае $f(5888)=\dfrac{5888}{5\cdot8\cdot8\cdot8}=\dfrac{736}{5\cdot8\cdot8}=\dfrac{92}{5\cdot8}=\dfrac{23}{10}$ – не является несократимой дробью со знаменателем 160.

Итак, рассмотрев все возможные случаи, получаем, что искомое наименьшее возможное значение равно $\dfrac{489}{160}$.

Тест №14. Сумма всех первоначально написанных на доске чисел равна $19\cdot10=190$. Пусть S – сумма всех чётных чисел, написанных на доске, тогда $(190-S)$ – сумма всех нечётных чисел. После умножения на 2 всех нечётных чисел и деления на 2 всех чётных чисел, сумма чисел, написанных на доске, станет равна $2\cdot(190-S)+\dfrac{S}{2}=380-\dfrac{3S}{2}$, а среднее арифметическое этих чисел будет равно $A=20-\dfrac{3S}{38}$.

а) Для выполнения равенства $A=17$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\dfrac{3S}{38}=3$, или $S=38$. Пусть на доске написаны следующие 19 чисел: $8, 8, 8, 8, 6, \underbrace{11, 11, \ldots, 11}_{13\text{ чисел}}, 9$.

Сумма всех этих чисел равна 190, а сумма всех чётных из них равна $S=38$, и, значит, для этого набора чисел $A=17$. Ответ в пункте а) – да.

б) Для выполнения равенства $A=7$ необходимо, чтобы выполнялось равенство $\dfrac{3S}{38}=13$, или $S=\dfrac{38\cdot13}{3}$. Но это невозможно, так как число $\dfrac{38\cdot13}{3}$ не является целым. Ответ в пункте б) – нет.

в) Значение $A=20-\dfrac{3S}{38}$ тем больше, чем меньше S. Докажите, что $S\geqslant2$ (т.к. S чётно, то для этого достаточно показать, что $S>0$, т.е. что среди написанных на доске чисел есть хотя бы одно чётное число). Из неравенства $S\geqslant2$ следует, что $A=20-\dfrac{3S}{38}\leqslant20-\dfrac{3\cdot2}{38}$, т.е. $A\leqslant19\dfrac{16}{19}$. Значение $A=19\dfrac{16}{19}$ реализуется для следующего набора чисел, первоначально написанного на доске: $2, 1, \underbrace{11, 11, \ldots, 11}_{17\text{ чисел}}$.

Тест №16. Ответ и в пункте а), и в пункте б) – да, могло. Если тест писали 30 человек, из которых 10 человек набрали по 32 балла, 10 человек набрали по 44 балла, а оставшиеся 10 человек – по 56 баллов, то средний балл не сдавших тест был равен 32 (это все участники, набравшие по 32 балла), а средний балл сдавших тест был равен $\dfrac{10\cdot(44+56)}{20}=50$. После уменьшения результата каждого участника на 5 баллов в категорию не сдавших тест перейдут те, кто первоначально набрал 44 балла. При этом средний балл не сдавших тест станет равен $\dfrac{10\cdot(27+39)}{20}=33$, т.е. этот средний балл повысится, а средний балл сдавших тест станет равен 51 – тоже повысится.

в) Пусть k – число участников теста, n_1 – число сдавших тест первоначально, n_2 – число сдавших тест после уменьшения всех результатов на 5 баллов. Аналогично решению задачи №19 предыдущего теста, получаем, что числа k, n_1, n_2 удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{cases}50k=56n_1+26(k-n_1)\\45k=52n_2+24(k-n_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}24k=30n_1\\21k=28n_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4k=5n_1\\3k=4n_2\end{cases}(*).$$

Из системы $(*)$ следует, что k делится на 5 и k делится на 4, а значит, k делится на 20, т.е. $k\geqslant20$.

В качестве примера, показывающего, что при 20 участниках распределение баллов могло быть таким, как указано в условии пункта в), т.е. что нижняя оценка $k=20$ достижима, приведём такое распределение баллов: 4 человека – по 26 баллов, 1 человек – 41 балл, 15 человек – по 57 баллов. Тогда $k=20$, $n_1=16$, $n_2=15$, и оба условия системы $(*)$ выполнены. Поэтому достаточно проверить выполнение лишь следующих трёх условий пункта в): первоначально средний балл всех участников теста составил 50, средний балл участников, сдавших тест, составил 56, а после уменьшения всех результатов на 5 баллов, средний балл, сдавших тест, стал равен 52. При этом другие два условия пункта в) – о среднем балле, не сдавших тест первоначально, и среднем балле, не сдавших тест после уменьшения результатов, будут выполнены автоматически.

Тест №18. а) Число $n = 13^{12}$ делится на 13, а всего натуральные делители этого числа – это числа $1, 13, 13^2, \dots, 13^{12}$, их количество равно 12.
б) Заметим, что $n \,\vdots\, 20 \Leftrightarrow n \,\vdots\, 2^2$ и $n \,\vdots\, 5 \Leftrightarrow$ разложение числа n на простые множители одного из двух видов: $n = 2^\alpha \cdot 5^\beta$ или $n = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot p_1^{\delta_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\delta_k}$, причём в обоих случаях $\alpha \geqslant 2$. Пусть $d(n)$ – количество делителей числа n, равное по условию 20. Воспользовавшись формулой для количества делителей числа (см. формулу (*) в решении №19 предыдущего теста), получим: $(\alpha+1)\cdot(\beta+1) = 20$ или $(\alpha+1)\cdot(\beta+1)\cdot\ldots\cdot(\delta_k+1) = 20$. Рассмотрим поочерёдно оба случая. В первом случае, с учётом условия $\alpha \geqslant 2$, имеем: $\alpha = 3, \beta = 4$ или $\alpha = 4, \beta = 3$ или $\alpha = 9, \beta = 1$. Таким образом, в этом случае условию пункта б) удовлетворяют только числа $2^3 \cdot 5^4 = 5000$, $2^4 \cdot 5^3 = 2000$ и $2^9 \cdot 5 = 2560$.

Во втором случае из равенства $(\alpha+1)\cdot(\beta+1)\cdot\ldots\cdot(\delta_k+1) = 20$, учитывая условия $(\alpha+1) \geqslant 3$, $(\beta+1) \geqslant 2$, $(\delta_k+1) \geqslant 2$, получаем: $\alpha+1 = 5$, $\beta+1 = 2$, $\delta_k+1 = 2$, причём $k = 1$ — т.е. в разложение n на простые множители кроме чисел 2 и 5 входит лишь одно простое число. Следовательно, в этом случае условие пункта б) выполняется для чисел вида $2^4 \cdot 5 \cdot p$, где p – некоторое простое число. Наименьшим из таких чисел является число $2^4 \cdot 5 \cdot 3 = 240$. Сравнивая возможные значения n, найденные в обоих случаях, получаем, что наименьшим из них является $n = 240$.

в) Разложите число 2013 на простые множители: $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Далее аналогично пункту в) задачи 21 предыдущего теста.

Тест №20. После каждой проведённой операции количество написанных на доске чётных чисел или не изменяется, или уменьшается на 2. Отсюда следует, что последнее оставшееся на доске число обязательно будет чётным. Далее с небольшими изменениями повторите рассуждения из решения задачи предыдущего теста.