

*Д.А. Мальцев,
А.А. Мальцев,
Л.И. Мальцева*

МАТЕМАТИКА

Подготовка к ЕГЭ 2018

Профильный уровень

✓ *50 тестов по Демоверсии ЕГЭ 2018*

✓ *Задачник: более 150 заданий
с развёрнутым ответом*

Издатель Мальцев Д.А.
Ростов-на-Дону

Народное образование
Москва
2018

Содержание

| | |
|--|-----|
| От авторов | 4 |
| Глава I. Экзаменационно-тренировочные тесты | 8 |
| Тесты №1–5 | 8 |
| Тесты №6–10 | 26 |
| Тесты №11–15 | 45 |
| Тесты №16–20 | 64 |
| Тесты №21–25 | 81 |
| Тесты №26–30 | 98 |
| Тесты №31–35 | 115 |
| Тесты №36–40 | 132 |
| Тесты №41–45 | 150 |
| Тесты №46–50 | 166 |
| Глава II. Задачник | 184 |
| Уравнения и системы уравнений (задание №13) | 184 |
| Стереометрия (задание №14) | 186 |
| Неравенства и системы неравенств (задание №15) | 188 |
| Планиметрия (задание №16) | 192 |
| Задачи с практическим содержанием (задание №17) | 195 |
| Уравнения и неравенства с параметром (задание №18) | 198 |
| Математические модели. Теория чисел (задание №19) | 201 |
| Ответы к тестам | 204 |
| Ответы к задачнику | 216 |
| Карта индивидуальных достижений обучающегося | 221 |
| Список литературы | 223 |

От авторов

Данное пособие является одной из книг учебно-методического комплекта «Математика. Подготовка к ЕГЭ 2018», предназначенной для учащихся, сдающих Профильный ЕГЭ по математике (о других книгах этого комплекта см. на страницах 219 и 220). Пособие состоит из двух глав.

Глава I содержит 50 тестов. На взгляд авторов, для успешной сдачи любого экзамена полезно знакомство с «историей вопроса», т.е. с теми задачами, которые предлагались на этом экзамене в предшествующие годы. Поэтому в тестах данной книги, условно названных «экзаменационно-тренировочными», авторы, проанализировав материал ЕГЭ по математике предшествующих лет, отобрали все основные идеи, заложенные в экзаменационные задания.

В главе II приведён задачник, содержащий более 150 заданий с развёрнутым ответом.

Все тесты данного пособия попарно подобны — тест №2 подобен тесту №1, тест №4 подобен тесту №3, и т.д.

Одновременно с данной книгой выходит её Решебник. В этом Решебнике приведены полные решения заданий с развёрнутым ответом для всех тестов с нечётными номерами (т.е. решения тестов №1, №3, №5 и т.д.), а также решения всех заданий с нечётными номерами из Задачника. Кроме того, в Решебнике даны указания к решениям задач №16 (планиметрия) и №19 (олимпиадная тематика) тестов с чётными номерами.

О преимуществах данного пособия

Одним из преимуществ данной книги является особенная «парность» заданий «части С» (т.е. заданий с развёрнутым ответом). Большинство заданий «части С» данной книги таково, что «парная» задача развивает идею задачи из предыдущего теста. Поэтому для решения «парной» задачи недостаточно лишь поменять цифры в решении аналогичной задачи предшествующего теста, а придётся заново продумывать некоторые детали и нюансы. Это особенно ценно при подготовке к заданиям «части С», так как можно прочитать и понять 100 готовых решений, но не решить на экзамене 101-ую, в чём-то аналогичную, но в чём-то и отличающуюся задачу. Решая задания «части С» из этой книги, школьник учится преодо-

леть психологический барьер — состояние «изменённой ситуации» при решении задачи (т.е. такой ситуации, с которой он сталкивается впервые).

Из других преимуществ данной книги отметим большое число тестов и заданий «части С» в задачнике при относительно невысокой её цене.

Об оценивании результатов тестирования

Поясним некоторые термины, связанные с оцениванием результатов ЕГЭ. «Первичные баллы» — баллы, выставляемые за каждое выполненное задание. За верно выполненное задание с кратким ответом выставляется 1 первичный балл. Баллы за задания с развёрнутым ответом (задания №13–№19) выставляются в зависимости от степени верности их выполнения. В 2018 году задания №13, 14, 15 оцениваются по шкале от 0 до 2 баллов, задания №16, 17 — по шкале от 0 до 3 баллов, а задания №18, 19 — по шкале от 0 до 4 баллов. Таким образом, максимальное количество первичных баллов, которое может получить выпускник, составляет 32 балла: за все задания с кратким ответом — 12 баллов; за задания с развёрнутым ответом — 20 баллов.

«Сертификационный балл» — балл, выставляемый в свидетельство о сдаче ЕГЭ. Ниже приведена таблица, использовавшаяся при оценивании результатов выпускников 2017 года.

Таблица перевода первичных баллов
в сертификационные баллы

| Перв. балл | Сертиф. балл | Перв. балл | Сертиф. балл | Перв. балл | Сертиф. балл |
|------------|--------------|------------|--------------|------------|--------------|
| 0 | 0 | 11 | 56 | 22 | 86 |
| 1 | 5 | 12 | 62 | 23 | 88 |
| 2 | 9 | 13 | 68 | 24 | 90 |
| 3 | 14 | 14 | 70 | 25 | 92 |
| 4 | 18 | 15 | 72 | 26 | 94 |
| 5 | 23 | 16 | 74 | 27 | 96 |
| 6 | 27 | 17 | 76 | 28 | 98 |
| 7 | 33 | 18 | 78 | 29 | 99 |
| 8 | 39 | 19 | 80 | 30 | 100 |
| 9 | 45 | 20 | 82 | 31 | 100 |
| 10 | 50 | 21 | 84 | 32 | 100 |

Никаких изменений в плане экзаменационной работы 2018 года, по сравнению с 2017 годом, нет. Поэтому при тренировках по тестам данного пособия для примерного оценивания своих результатов вполне можно использовать приведённую выше таблицу.

Отметим, что на реальном экзамене при оценивании заданий с развёрнутым ответом учитывается не только правильность окончательного ответа, но и сам ход рассуждений. Поэтому для определения баллов, которые могут быть выставлены за приведённые вами решения этих заданий, рекомендуем обращаться к учителю математики или другому специалисту.

О возможной системе подготовки к ЕГЭ

Для того чтобы получить общее представление о структуре экзаменационной работы, прорешайте тесты №1,2 данного пособия. А затем начните устранение пробелов в своих знаниях, которые обнаружатся при прорешивании этих двух тестов. В этом Вам помогут книги данного учебно-методического комплекта, посвящённые заданиям части I по алгебре, по геометрии и заданиям части I «с практическим содержанием» (подробнее см. на странице 220).

Обратите внимание! Даже если Вы очень уверены в «своих силах», необходимо прорешать все различные типы заданий с кратким ответом. Как показывает практика, многие «сильные» ученики допускают на экзамене несколько досадных ошибок в решении заданий №1–№12. При этом для получения баллов, позволяющих поступить практически в любой ВУЗ страны, вовсе не обязательно приступать к решению каждого из заданий с развёрнутым ответом. Правильное решение всех заданий с кратким ответом и заданий №13,15,17 соответствует 19-ти первичным баллам, но 95% выпускников 2017 года набрали меньшее число баллов. А это означает, что, «отшлифовав» решение всех заданий с кратким ответом и научившись решать задания №13,15,17, Вы можете претендовать на то, чтобы попасть в число тех 5% выпускников, которые напишут ЕГЭ по математике с весьма хорошим результатом. (Задания №13,15,17 выделены здесь не случайно! На взгляд авторов, среди всех заданий с развёрнутым ответом именно эти задачи наиболее доступны «среднему» ученику.)

Полностью проработав задания с кратким ответом, приступайте к решению тестов данной книги.

Рекомендуем Вам построить свои занятия по тестам пособия таким образом, чтобы учебные занятия чередовались с тренировочными.

На учебном занятии знакомьтесь с методами решения тех заданий, которые Вы планируете решать на экзамене. Решения задач с развёрнутым ответом приведены в Решебнике к данной книге. Если же возникает вопрос по одному из заданий №1–№12, то рекомендуем Вам обращаться к своему учителю.

Для проведения тренировочного занятия необходимо отвести 2-3 часа. За это время попытайтесь решить самостоятельно те задания, к выполнению которых Вы рассчитываете приступить на экзамене. Решайте задачи так, словно Вы уже на экзамене, не заглядывая в ответы. В конце занятия сверьте свои ответы с ответами, данными в книге. Не вдаваясь в детали, скажем, что польза от подобных тренировок огромна!

Желаем Вам успеха!

Тест № 5

Часть 1

1 Ананасы стоят 125 рублей за штуку. Какое максимальное число ананасов можно купить на 700 рублей, если их цена снизится на 15%?

Ответ: _____

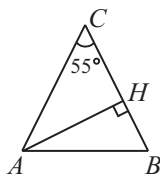
2 На рисунке показано изменение биржевой стоимости акций целлюлозно-бумажного завода в первой половине сентября. 4 сентября бизнесмен приобрёл 100 акций этого завода. 8 сентября он продал 80 акций, а оставшиеся акции продал 13 сентября. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?



Ответ: _____

3 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB угол C равен 55° . Найдите угол между стороной AB и высотой AH этого треугольника.

Ответ: _____



4 У Кати в копилке лежит 7 однорублёвых, 6 двухрублёвых и 3 пятирублёвых монеты. Катя наугад достает из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся после этого в копилке сумма составит более 30 рублей.

Ответ: _____

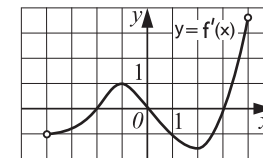
5 Найдите корень уравнения $6^{2,6x+10} = \frac{1}{216}$.

Ответ: _____

6 В треугольнике ABC : $\angle C = 90^\circ$, $BC = 7$, $AC = \sqrt{15}$. Найдите $\cos \angle B$.

Ответ: _____

7 Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 4)$. На рисунке изображён график её производной. Найдите точку x_0 , в которой функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение.



Ответ: _____

8 Куб вписан в цилиндр, площадь основания которого равна 72π . Найдите площадь поверхности куба.

Ответ: _____

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\log_5 437,5 - \log_5 0,7$.

Ответ: _____

10 Мяч брошен вверх так, что пока он не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой: $h(t) = 0,25 + 2,4t - t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько процентов от всего времени полёта мяча составляет время, в течении которого мяч находился на высоте не менее 1,05 метра?

Ответ: _____

11 Два промышленных фильтра, работая одновременно, очищают цистерну воды за 24 минуты. Определите, за сколько минут второй фильтр очистит цистерну воды, работая отдельно, если известно, он сделает это на 20 минут быстрее, чем первый.

Ответ: _____

12 Найдите точку максимума функции $y = \ln(x + 15)^{16} - 16x$.

Ответ: _____

Задания с развёрнутым ответом

- 13** а) Решите уравнение $\frac{10 \cos^2 x + \cos x - 2}{\sqrt{-\sin x}} = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(-\pi; \frac{3\pi}{2})$.
- 14** Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, в котором $BC = 2AB$. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Отрезок SO является высотой пирамиды $SABCD$. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .
 а) Докажите, что $BP : PQ = 1 : 3$.
 б) Найдите двугранный угол пирамиды при ребре SB , если $SB = BC$.
- 15** Найдите все целые значения x , удовлетворяющие неравенству:
 $\log_{\sqrt{3}} \log_{\sqrt{2}} (x - \log_5 6) < 4$.
- 16** Отрезок BM — медиана треугольника ABC .
 а) Докажите, что $BM < \frac{1}{2}(AB + BC)$.
 б) Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = 17$, $BC = 9$, $BM = 5$.
- 17** В ноябре 2017 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S тыс. рублей, где S — натуральное число. Условия его возврата таковы:
 — каждый январь долг возрастает на 22% по сравнению с концом предыдущего года;
 — с февраля по октябрь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
 — в ноябре каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

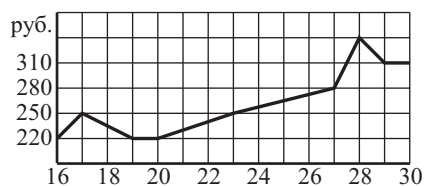
| Месяц и год | Ноябрь 2017 | Ноябрь 2018 | Ноябрь 2019 | Ноябрь 2020 |
|----------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Долг (в тыс. рублей) | S | $0,7S$ | $0,5S$ | 0 |

- Найдите наименьшее значение S , при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.
- 18** Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $5x + |2x - |x + a|| = 10|x + 1|$ имеет хотя бы один корень.
- 19** Каждый из 30 студентов писал одну из двух контрольных работ или писал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл писавших её студентов составил 16. Возьмём наивысший балл каждого из студентов, полученных им за эти контрольные работы (если студент писал одну работу, то берём балл за эту работу), и подсчитаем среднее арифметическое этих баллов, обозначив результат через S .
 а) Приведите пример, когда $S < 16$.
 б) Может ли S быть равным 8?
 в) Какое наименьшее значение может принимать S , если обе контрольные работы писали 12 студентов?

Тест № 6

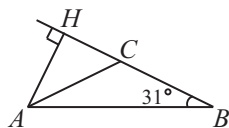
Часть 1

- 1** Стоимость проезда в маршрутном такси составляет 23 рубля. Какое наибольшее число поездок можно будет совершить в этом маршрутном такси на 320 рублей, если цена проезда снизится на 10%?
 Ответ: _____
- 2** На рисунке показано изменение биржевой стоимости акций горно-обогатительного комбината во второй половине ноября. 18 ноября бизнесмен приобрёл 4000 акций этого комбината. Три четверти своих акций он продал 25 ноября, а оставшиеся акции — 28 ноября. Сколько рублей приобрёл бизнесмен в результате этих операций?



Ответ: _____

- 3 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB угол B равен 31° . Найдите угол между стороной AC и высотой AH этого треугольника.



Ответ: _____

- 4 У Дины в копилке лежит 12 двухрублёвых, 7 пятирублёвых и 6 десятирублёвых монет. Дина наугад достаёт из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся после этого в копилке сумма составит менее 115 рублей.

Ответ: _____

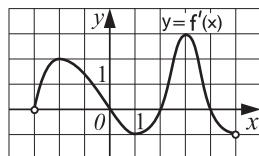
- 5 Найдите корень уравнения $3^{2,4x+13} = \frac{1}{243}$.

Ответ: _____

- 6 В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $BC = 36$, $AB = 39$. Найдите $\operatorname{tg} \angle A$.

Ответ: _____

- 7 Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3; 5)$. На рисунке изображён график её производной. Найдите точку x_0 , в которой функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение.



Ответ: _____

- 8 Куб описан около цилиндра. Объём куба равен $\frac{729}{\pi}$. Найдите объём цилиндра.

Ответ: _____

Часть 2

- 9 Найдите значение выражения $\lg 312,5 + \lg 3,2$.

Ответ: _____

- 10 Мяч бросили вверх так, что пока он не упал на землю, его высота над землёй менялась по закону: $h(t) = 1,2 + 1,9t - t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько процентов от всего времени полёта мяча составляет время, в течении которого мяч находился на высоте не более 1,54 метра?

Ответ: _____

- 11 При двух одновременно работающих принтерах расход бумаги составляет 1 пачку за 10 минут. Определите, за сколько минут израсходует пачку бумаги первый принтер, если известно, что он сделает это на 15 минут быстрее, чем второй.

Ответ: _____

- 12 Найдите точку минимума функции $y = 21x - \ln(x + 20)^{21}$.

Ответ: _____

Задания с развёрнутым ответом

- 13 а) Решите уравнение $\frac{2 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3}{\sqrt{-\cos x}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(\frac{\pi}{2}; 3\pi)$.

- 14 Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причём $SB = BC = \sqrt{2}AB$. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Отрезок SO является высотой пирамиды $SABCD$. Из вершины A опущены перпендикуляры AP и AQ на рёбра SB и SD соответственно.

а) Докажите, что прямая PQ делит высоту пирамиды в отношении $3 : 2$, считая от точки S .

б) Найдите двугранный угол пирамиды при ребре SB .

15 Найдите все целые значения x , удовлетворяющие неравенству:

$$\log_{\sqrt{3}} \log_{\sqrt{5}} (x - \log_4 11) < 2.$$

16 В треугольнике ABC угол при вершине B острый. Отрезок BM — медиана этого треугольника.

а) Докажите, что $BM > \frac{1}{2} AC$.

б) Найдите $\sin \angle ABC$, если $AB = 15$, $BC = 7$, $BM = 10$.

17 В июле 2018 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S тыс. рублей, где S — натуральное число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

| Месяц и год | Июль 2018 | Июль 2019 | Июль 2020 | Июль 2021 | Июль 2022 |
|----------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Долг (в тыс. рублей) | S | $0,5S$ | $0,4S$ | $0,2S$ | 0 |

Найдите наименьшее значение S , при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $9x - 6 \cdot |3x - 4| \geq |x - |5x + a||$ выполнено хотя бы для одного целого значения x .

19 Каждый из 28 студентов писал одну из двух контрольных работ или писал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл писавших её студентов составил 15. Возьмём наивысший балл каждого из студентов, полученных им за эти контрольные работы (если студент писал одну работу, то берём балл за эту работу), и подсчитаем среднее арифметическое этих баллов, обозначив результат через S .

а) Приведите пример, когда $S < 15$.

б) Может ли S быть равным 10?

в) Какое наименьшее значение может принимать S , если обе контрольные работы писали 18 студентов?

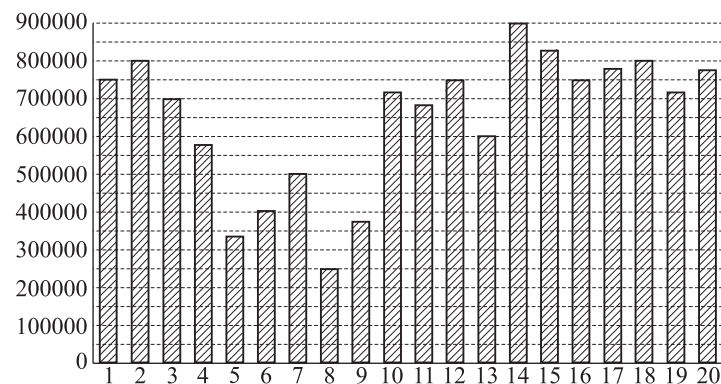
Тест № 7

Часть 1

1 В обменном пункте 1 китайский юань стоит 9 рублей 80 копеек. Отдыхающие обменяли рубли на юани и купили 3,5 кг персиков по 6 юаней за 1 кг. Во сколько рублей обошлась им эта покупка? Ответ округлите до целого числа.

Ответ: _____

2 На диаграмме показано количество посетителей новостного сайта во все дни с 1 по 20 марта 2008 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, во сколько раз наибольшее количество посетителей за день больше, чем наименьшее количество посетителей за день.



Ответ: _____

3] Прямоугольник разбит на четыре меньших прямоугольника двумя прямолинейными разрезами. Площади трёх из них, начиная с левого нижнего и далее по часовой стрелке, равны 14, 7 и 21, см. рисунок. Найдите площадь исходного прямоугольника.

| | |
|----|----|
| 7 | 21 |
| 14 | |

Ответ: _____

4] Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,58. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,31. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет ровно одну партию.

Ответ: _____

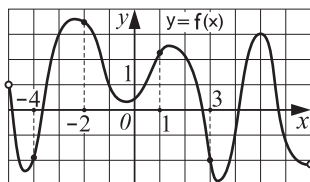
5] Найдите корень уравнения $3^{3-5x} = 0,6 \cdot 5^{3-5x}$.

Ответ: _____

6] Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 78, её большая боковая сторона равна 21. Найдите радиус окружности.

Ответ: _____

7] На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $(-5; 7)$. На оси абсцисс отмечены точки $-4, -2, 1, 3$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ: _____

8] Объём треугольной пирамиды равен 23. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боко-

вое ребро в точке, делящей его в отношении 2 : 3, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объёмов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.

Ответ: _____

Часть 2

9] Найдите $p(x - 5) + p(5,2 - x)$, если $p(x) = 5x - 2$.

Ответ: _____

10] Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K + 1)^m}$, где $m = \frac{0,02K}{r_{\text{пок}} + 0,1}$, $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями, $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина, данная экспертами, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 15, их средняя оценка равна 0,5, а оценка экспертов равна 0,22.

Ответ: _____

11] Две машины едут по асфальтированной дороге со скоростью 90 км/ч, сохраняя дистанцию 36 метров. Когда машина сворачивает на грунтовую дорогу, её скорость резко падает до 60 км/ч. Каким будет расстояние между машинами на грунтовой дороге? Ответ дайте в метрах.

Ответ: _____

12] Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{3x^2 + 12x + 23}$.

Ответ: _____

Задания с развёрнутым ответом

13] а) Решите уравнение $\log_2^2(\cos^2 x) - 22 \log_2(\cos x) - 12 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{\pi}{2}; 2\pi]$.

14] В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S и основанием ABC сторона основания равна 9, а высота равна 3. На рёб-

рах AB , AC и AS отмечены соответственно точки M , N и K такие, что $AM = AN = AS$, $AK = 4$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Найдите объём пирамиды $KSBC$.

15) Решите неравенство $\frac{36^x - 6^{x+1} + 3}{6^x - 5} + \frac{6^{x+1} - 39}{6^x - 7} \leq 6^x + 5$.

16) Отрезки AK , BL , CN – высоты остроугольного треугольника ABC . Точки P и Q – проекции точки N на стороны AC и BC соответственно.

а) Докажите, что прямые PQ и KL параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника $PQKL$, если известно, что $CN = 12$, $AC = 13$, $BC = 15$.

17) Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 5 млн. рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 35 млн. рублей.

18) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{17x^2 + 8ax + 16} = x^2 + ax + 4$$

имеет ровно три различных корня.

19) Множество чисел назовём «хорошим», если его можно разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел.

а) Является ли хорошим множество $\{1; 2; 3; \dots; 99; 100\}$, состоящее из первых ста натуральных чисел?

б) Является ли хорошим множество $\{2; 4; 8; \dots; 2^{99}; 2^{100}\}$, состоящее из первых ста степеней числа 2?

в) Сколько хороших подмножеств, состоящих из шести чисел, имеется у множества $\{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 16; 17; 18; 19\}$?

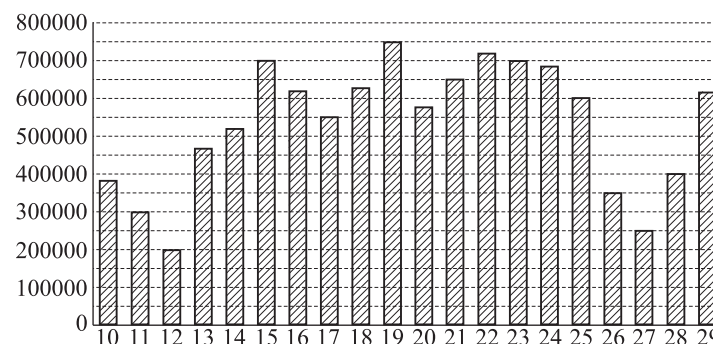
Тест №8

Часть 1

1) В обменном пункте 1 кубинское песо стоит 2 рубля 40 копеек. Отдыхающие обменяли рубли на песо и купили 4,5 кг манго по 28 песо за 1 кг. Во сколько рублей обошлась им эта покупка? Ответ округлите до целого числа.

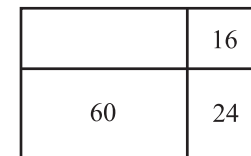
Ответ: _____

2) На диаграмме показано количество посетителей новостного сайта во все дни с 10 по 29 сентября 2012 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали – количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, на сколько процентов наибольшее количество посетителей за день больше, чем наименьшее количество посетителей за день.



Ответ: _____

3) Прямоугольник разбит на четыре меньших прямоугольника двумя прямолинейными разрезами. Площади трёх из них, начиная с правого верхнего и далее по часовой стрелке, равны 16, 24 и 60, см. рисунок. Найдите площадь исходного прямоугольника.



Ответ: _____

4 Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,65. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,28. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет хотя бы одну из партий.

Ответ: _____

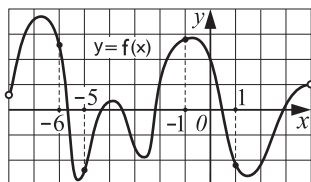
5 Найдите корень уравнения $6^{4+2x} = 0,24 \cdot 25^{4+2x}$.

Ответ: _____

6 Радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, равен 7. Большая боковая сторона трапеции равна 23. Найдите периметр трапеции.

Ответ: _____

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $(-8; 4)$. На оси абсцисс отмечены точки $-6, -5, -1, 1$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ: _____

8 Объём треугольной пирамиды равен 117. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении 7 : 11, считая от вершины пирамиды. Найдите меньший из объёмов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.

Ответ: _____

Часть 2

9 Найдите $3p(x-4) - p(3x)$, если $p(x) = 7 - x$.

Ответ: _____

10 Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+1)^m}$, где $m = \frac{0,02K}{r_{\text{пок}} + 0,1}$, $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями, $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина, данная экспертами, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите значение оценки магазина, данное экспертами, если число покупателей, оценивших магазин, равно 7, их средняя оценка равна 0,32, а рейтинг магазина равен 0,245.

Ответ: _____

11 Два грузовика ехали по асфальтированной дороге со скоростью 70 км/ч, сохраняя дистанцию 35 метров. Свернув на просёлочную дорогу, каждый из них резко снизил скорость на одну и ту же величину, и дистанция между ними стала равной 22 метрам. Найдите скорость грузовиков на просёлочной дороге. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____

12 Найдите наибольшее значение функции $y = 3^{-3-8x-2x^2}$.

Ответ: _____

Задания с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $\log_3^2(\sin x) + \log_3(\sin^2 x) = \log_3 2 \cdot \log_3(\sin x)$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S и основанием $ABCD$ сторона основания равна 8, а высота равна 7. На рёбрах AS , AB и CD отмечены соответственно точки K , M и N такие, что $SK = 6$, $BM = CN = 2DN$.

- а) Докажите, что плоскости KMN и SBC параллельны.
б) Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC .

15 Решите неравенство

$$\frac{8^x + 3 \cdot 2^x - 32}{2^x - 3} + \frac{8^x - 2^{x+3} - 7}{4^x - 8} \geq 4^x + 2^{x+2} + 12.$$

16 В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A провели перпендикуляр AH к стороне CD , а затем через точку C провели прямую, параллельную прямой AH и пересекающую сторону AB в точке E .

- а) Докажите, что прямые BH и DE параллельны.
 б) Известно, что $BC = 9$, $AD = 17$, $AB : CD = 3 : 5$. Найдите площадь треугольника BPH , где P — точка пересечения прямых AB и CD .

17 Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале второго и третьего годов вклад ежегодно пополняется на 2 млн. рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет больше 21 млн. рублей.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 + (2a - 3)x^2 + 4a^2} = x^2 + 3x - 2a$$

имеет ровно три различных корня.

19 Множество чисел назовём «хорошим», если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.

- а) Является ли хорошим множество $\{100; 101; \dots; 199\}$, состоящее из ста подряд идущих натуральных чисел?
 б) Является ли хорошим множество $\{2^{100}; 2^{101}; \dots; 2^{199}\}$, состоящее из ста чисел, являющихся подряд идущими степенями числа 2?
 в) Сколько хороших подмножеств, состоящих из четырёх чисел, имеется у множества $\{1; 4; 8; 13; 15; 17; 19; 21\}$?

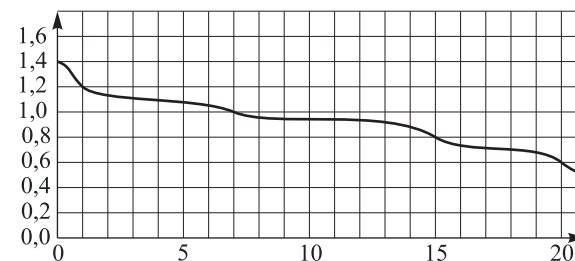
Тест № 9

Часть 1

1 Студентами технических вузов собираются стать 54 выпускника школы. Они составляют 45% от числа всех выпускников школы. Сколько в школе выпускников?

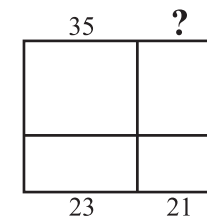
Ответ: _____

2 При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, за сколько часов напряжение упадёт с 1 вольт до 0,6 вольт.



Ответ: _____

3 Прямоугольник разбит на четыре меньших прямоугольника двумя прямолинейными разрезами. Периметры трёх из них, начиная с левого верхнего и далее против часовой стрелки, равны 35, 23 и 21, см. рисунок. Найдите периметр четвёртого прямоугольника.



Ответ: _____

4 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 30 пассажиров, равна 0,86. Вероятность того, что окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,63. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 20 до 29.

Ответ: _____

5 Найдите корень уравнения $5^{\log_{25}(4x-25)} = 4$.

Ответ: _____

6 Стороны параллелограмма равны 42 и 33. Высота, опущенная на

меньшую из этих сторон, равна 14. Найдите высоту, опущенную на большую сторону параллелограмма.

Ответ: _____

7) Прямая $y = 2x + 13$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - 22x - 15$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: _____

8) Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 89. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.

Ответ: _____

Часть 2

9) Найдите значение выражения $\frac{\log_4 540}{\log_4 3} + \log_3 0,05$.

Ответ: _____

10) Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a = 4800 \text{ км/ч}^2$. Скорость v (в км/ч) автомобиля вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите, сколько метров проедет автомобиль к моменту, когда он разгонится до скорости 84 км/ч.

Ответ: _____

11) Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась втрое, общий доход семьи вырос бы на 114%. Если бы стипендия дочери уменьшилась вчетверо, общий доход семьи сократился бы на 6%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Ответ: _____

12) Найдите точку минимума функции $y = \log_6(x^2 - 7x + 16) + 7$.

Ответ: _____

Задания с развёрнутым ответом

13) а) Решите уравнение $2 \log_3^2(\operatorname{tg} x) + 5 \log_3(\operatorname{ctg} x) + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{5\pi}{4}\right]$.

14) В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ сторона основания AB равна 8, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах $A_1 B_1$, AB и AC отмечены соответственно точки M , N и K такие, что $B_1 M = AN = 2$, $CK = 4$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром $B_1 C_1$. Докажите, что $MNKL$ — прямоугольник.

б) Найдите площадь сечения данной призмы плоскостью MNK .

15) Решите неравенство $343^x - 3 \cdot 49^x + \frac{2 \cdot 7^{2x+1} - 7^{x+2} + 63}{7^x - 9} + 7 \geq 0$.

16) В прямоугольном треугольнике ABC отрезок CH — высота к гипотенузе AB , точки I и J — центры вписанных окружностей треугольников ACH и BCH соответственно. Прямые CI и CJ пересекают гипотенузу AB в точках K и L соответственно.

а) Докажите, что прямая KJ параллельна прямой AI , а прямая LI параллельна прямой BJ .

б) Найдите длину отрезка IJ , если $AC = 15$, $BC = 8$.

17) 15-го января планируется взять кредит в банке на 1 млн. рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

| Дата | 15.01 | 15.02 | 15.03 | 15.04 | 15.05 | 15.06 | 15.07 |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Долг (в млн. рублей) | 1 | 0,7 | 0,6 | 0,4 | 0,2 | 0,1 | 0 |

Найдите наибольшее значение r , при котором общая сумма выплат будет составлять менее 1,7 млн. рублей.

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $5^{x^3-6x^2+34} - (a+2) \cdot (\sqrt{5})^{x^3-6x^2+34} + a^2 - 7a + 12 = 0$ имеет ровно пять различных корней.

- 19 На доске написаны числа 7 и 8. За один ход разрешено заменить написанную на доске пару чисел a и b парой чисел $2a - 1$ и $a + b$. (Например, из пары чисел 7 и 8 за один ход можно получить либо числа 13 и 15, либо числа 15 и 15.)

- а) Может ли случиться так, что после нескольких ходов одно из написанных на доске чисел будет равно 99?
 б) Может ли случиться так, что после 22 ходов одно из написанных на доске чисел будет равно 8787878?
 в) После 1001 хода на доске получили пару чисел, не равных друг другу. Какое наименьшее значение может иметь разность между большим и меньшим из этих чисел?

Тест № 10

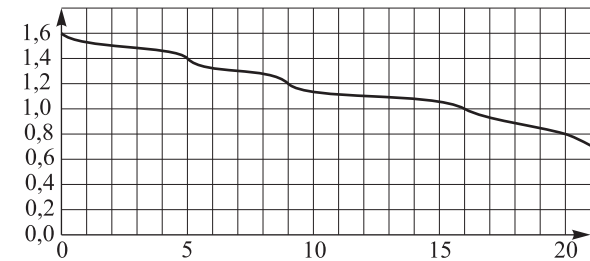
Часть 1

- 1 В школе французский язык изучают 156 учащихся, что составляет 26% от числа всех учащихся школы. Сколько учащихся в школе?

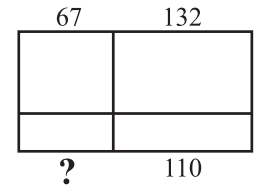
Ответ: _____

- 2 При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, за сколько часов напряжение упадёт с 1,2 вольта до 0,8 вольт.

Ответ: _____



- 3 Прямоугольник разбит на четыре меньших прямоугольника двумя прямолинейными разрезами. Периметры трёх из них, начиная с левого верхнего и далее по часовой стрелке, равны 67, 132 и 110, см. рисунок. Найдите периметр четвёртого прямоугольника.



Ответ: _____

- 4 Вероятность того, что новый электрический миксер прослужит больше года, равна 0,98. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что миксер прослужит меньше двух лет, но больше года.

Ответ: _____

- 5 Найдите корень уравнения $11^{\log_{121}(5x-11)} = 12$.

Ответ: _____

- 6 Высоты, опущенные из одной вершины параллелограмма на его стороны, равны 24 и 25. Площадь параллелограмма равна 975. Найдите большую из его сторон.

Ответ: _____

- 7 Прямая $y = -20x - 400$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 6x^2 - 200x + 1000$. Найдите ординату точки касания.

Ответ: _____

8] Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 147. Найдите площадь боковой поверхности исходной треугольной призмы.

Ответ: _____

Часть 2

9] Найдите значение выражения $\log_2 480 - \frac{\log_7 7,5}{\log_7 2}$.

Ответ: _____

10] Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a (в км/ч²). Скорость v (в км/ч) автомобиля вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Проехав 800 метров, автомобиль разогнался до скорости 72 км/ч. Найдите ускорение a . Ответ дайте в км/ч².

Ответ: _____

11] Кондитерская фабрика выпускает мармелад, зефир и пастилу. Если фабрика увеличит продажи мармелада в шесть раз, то общая прибыль от продаж увеличится на 210%. Если фабрика уменьшит продажи зефира в пять раз, то общая прибыль от продаж уменьшится на 36%. Сколько процентов от общей прибыли составляет прибыль от продажи пастилы?

Ответ: _____

12] Найдите точку максимума функции $y = \log_2(12 + x - x^2) - 21$.

Ответ: _____

Задания с развёрнутым ответом

13] а) Решите уравнение $\lg^2(\operatorname{tg}^2 x) + \lg(\cos x) = \lg(\sin x)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$.

14] В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 9, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На рёбрах A_1B_1 , A_1C_1 и

AC отмечены соответственно точки M , N и K такие, что $B_1M = A_1N = CK = 3$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения данной призмы плоскостью MNK .

15] Решите неравенство $\frac{64^x - 7 \cdot 16^x}{4^x + 1} + \frac{6 \cdot 16^x - 3 \cdot 4^{x+2} + 42}{4^x - 6} \geq 0$.

16] В прямоугольном треугольнике ABC отрезок CH — высота к гипотенузе AB , точки I и J — центры вписанных окружностей треугольников ACH и BCH соответственно, M и N — точки касания вписанной окружности треугольника ABC с катетами AC и BC соответственно.

а) Докажите, что четырёхугольник $IMNJ$ параллелограмм.

б) Найдите площадь четырёхугольника $IMNJ$, если $AC = 12$, $BC = 5$.

17] 15-го января планируется взять кредит в банке на 1 млн. рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

| Дата | 15.01 | 15.02 | 15.03 | 15.04 | 15.05 | 15.06 | 15.07 |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Долг (в млн. рублей) | 1 | 0,8 | 0,7 | 0,5 | 0,4 | 0,3 | 0 |

Найдите наименьшее значение r , при котором общая сумма выплат будет составлять более 2,15 млн. рублей.

18] Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$2^{x^3 - 3x^2 + 4} + (a - 10) \cdot (\sqrt{2})^{x^3 - 3x^2 + 4} + 12 - a = 0$$

имеет шесть различных корней.

19 На доске написаны числа 3 и 5. За один ход разрешено заменить написанную на доске пару чисел a и b парой чисел $2a - 1$ и $a + b + 1$. (Например, из пары чисел 3 и 5 за один ход можно получить либо числа 5 и 9, либо числа 9 и 9.)

а) Может ли случиться так, что после нескольких ходов на доске будут написаны числа 73 и 75?

б) Может ли случиться так, что после нескольких ходов одно из написанных на доске чисел будет равно 35?

в) После 2017 ходов на доске получили пару чисел, не равных друг другу. Какое наименьшее значение может иметь разность между большим и меньшим из этих чисел?

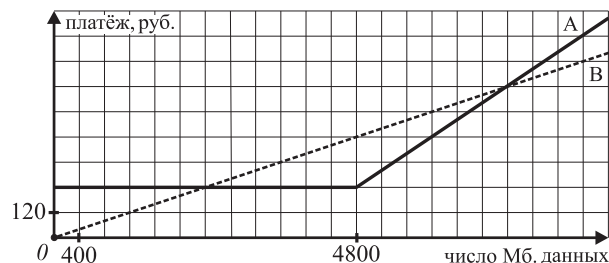
Тест № 11

Часть 1

1 Система навигации самолёта информирует пассажира о том, что полёт проходит на высоте 36000 футов. Выразите высоту полёта в метрах. Считайте, что 1 фут равен 30,5 см.

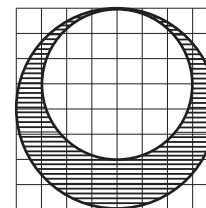
Ответ: _____

2 Компания предлагает на выбор два тарифа для оплаты доступа в сеть интернет — тариф А и тариф В. На рисунке для каждого из тарифов графически изображена зависимость ежемесячного платежа от числа полученных пользователем Мб. данных. Какое максимальное число Мб. данных за месяц может получать пользователь по одному из этих тарифов, чтобы его ежемесячный расход на интернет не превышал 840 рублей?



Ответ: _____

3 На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 18. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



Ответ: _____

4 Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,8, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,1. На столе лежит 20 револьверов, из них только 7 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон попадет в муху.

Ответ: _____

5 Найдите корень уравнения $\log_{16} 2^{(16x-11)} = 12$.

Ответ: _____

6 В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 15$, $CD = 26$. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.

Ответ: _____

7 Прямая $y = 6x + 27$ является касательной к графику функции $y = x^2 - 6x + c$. Найдите значение коэффициента c .

Ответ: _____

8 Основанием сосуда в форме прямоугольного параллелепипеда является квадрат со стороной 20 см. Высота воды в сосуде достигала 15 см. Пустую ёмкость, имеющую форму прямоугольного параллелепипеда со сторонами основания 10 см и 15 см и высотой 30 см, погрузили на дно сосуда. Вода в сосуде поднялась. Какой высоты достигла вода в сосуде? Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: _____

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\frac{\left(7^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{7}}\right)^{21}}{14^{14}}$.

Ответ: _____

10 Груз массой 0,5 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v(t) = v_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$ (м/с), где t – время с момента начала колебаний (в секундах), $T = 24$ с – период колебаний, $v_0 = 0,4$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле: $E = \frac{mv^2}{2}$, где m – масса груза (в кг), v – скорость груза (в м/с). Найдите кинетическую энергию груза через 3 секунды после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Ответ: _____

11 Коле надо решить 472 задачи. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днём. Известно, что за первый день Коля решил 7 задач. Определите, сколько задач решил Коля в последний день, если со всеми задачами он справился за 16 дней.

Ответ: _____

12 Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 - 10x + 250}$.

Ответ: _____

Задания с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $27^x - 9^{x+1} - 4 \cdot 3^{x+2} + 324 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие интервалу $(1,5; 2)$.

14 В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{5}$. На ребре $C_1 D_1$ отмечена точка K так, что $C_1 K = 3$, а точка M – середина ребра AB . Через точки K и M проведена плоскость γ , параллельная прямой AC .

а) Докажите, что прямая $B_1 D$ перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .

15 Решите неравенство $(20 - 17x) \cdot \log_{3x+7}(x^2 - 2x + 2) \leq 0$.

16 Точка P – центр вписанной окружности треугольника ABC . Прямые AP и BP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1 и B_1 .

а) Докажите, что прямая CP перпендикулярна прямой $A_1 B_1$.

б) Найдите длину отрезка $A_1 B_1$, если $AB = 6$, $\angle ACB = 30^\circ$.

17 В мае 2015 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн. рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 28% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по апрель каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в мае каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

| Месяц и год | Май 2015 | Май 2016 | Май 2017 | Май 2018 |
|-------------------------|----------|----------|----------|----------|
| Долг (в млн. рублей) | S | $0,9S$ | $0,6S$ | 0 |

Найдите наибольшее значение S , при котором общая сумма выплат будет меньше 82 млн. рублей.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} a \cdot (x^4 + 4) = y + 2 \cdot (1 - |x|) \\ |x| + |y| = 2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

19 Дано натуральное трёхзначное число n , в записи которого нет нулей. Для этого числа составим дробь $f(n)$, в числителе которой само число n , а в знаменателе – произведение всех цифр числа n .

а) Приведите пример такого числа n , для которого $f(n) = \frac{119}{24}$.

б) Существует ли такое n , что $f(n) = \frac{125}{24}$?

в) Какое наибольшее значение может принимать дробь $f(n)$, если она равна несократимой дроби со знаменателем 24?

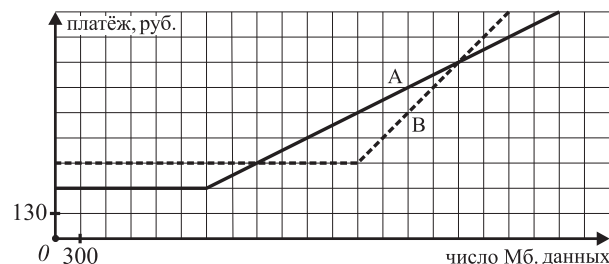
Тест № 12

Часть 1

1 Система навигации самолёта информирует пассажира о том, что полёт проходит на высоте 11590 метров. Выразите высоту полёта в футах. Считайте, что 1 фут равен 30,5 см.

Ответ: _____

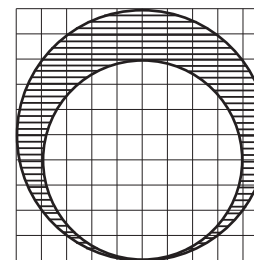
2 Компания предлагает на выбор два разных тарифа для оплаты доступа в сеть интернет — тариф А и тариф В. На рисунке для каждого из тарифов графически изображена зависимость ежемесячного платежа от числа полученных пользователем Мб. данных. Какую минимальную сумму (в рублях) должен заплатить пользователь по одному из этих тарифов за месяц, если он хочет получить не менее 5100 Мб. данных?



Ответ: _____

3 На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внешнего круга равна 75. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

Ответ: _____



4 Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 35% этих стекол, а вторая — остальные 65%. Из числа стёкол, изготовленных на первой фабрике, бракованными являются 4%, а из стёкол, изготовленных на второй фабрике, 2% бракованных. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Ответ: _____

5 Найдите корень уравнения $\log_{243} 3^{(24x+23)} = 4$.

Ответ: _____

6 В четырёхугольник $ABCD$, периметр которого равен 47, вписана окружность. Сторона AB равна 11. Найдите сторону CD .

Ответ: _____

7 Прямая $y = 7x - 77$ является касательной к графику функции $y = x^2 - 17x + c$. Найдите значение коэффициента c .

Ответ: _____

8 Основанием сосуда в форме прямоугольного параллелепипеда является квадрат со стороной 40 см. Высота воды в сосуде достигала 10 см. Пустую ёмкость, имеющую форму прямоугольного параллелепипеда со сторонами основания 25 см и 20 см и высотой 14 см, погрузили на дно сосуда. Вода в сосуде поднялась, и часть её перелилась в ёмкость. Какой высоты достигла вода в ёмкости? Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: _____

Часть 2

9] Найдите значение выражения $\frac{\left(5^{\frac{3}{5}} \cdot 11^{\frac{7}{11}}\right)^{55}}{55^{33}}$.

Ответ: _____

10] Груз массой m (в кг) колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v(t) = v_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$ (м/с), где t — время с момента начала колебаний (в секундах), $T = 15$ с — период колебаний, $v_0 = 0,8$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле: $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза (в кг), v — скорость груза (в м/с). Кинетическая энергия груза через 5 секунд оказалась равна 0,048 Дж. Найдите массу груза.

Ответ дайте в килограммах.

Ответ: _____

11] Даше надо подписать 555 открыток. Ежедневно она подписывает на одно и то же количество открыток меньше по сравнению с предыдущим днём. Известно, что за первый день Даша подписала 65 открыток. Определите, сколько открыток было подписано за пятый день, если вся работа была выполнена за 15 дней.

Ответ: _____

12] Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{28 - 3x - x^2}$.

Ответ: _____

Задания с развёрнутым ответом

13] а) Решите уравнение $8^x - 3 \cdot 4^{x+1} - 2^{x+2} + 48 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[3,5; 4]$.

14] В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ сторона основания AB равна 18, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{3}$. На ребре $B_1 C_1$ отмечена точка K так, что $B_1 K = 7$. Точки L и M середины рёбер AB и $A_1 C_1$ со-

ответственно. Через точки K и L проведена плоскость β , параллельная прямой AC .

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости β .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка M , а основание — сечение данной призмы плоскостью β .

15] Решите неравенство $(x^3 - 33x) \cdot \log_{4x+5}(x^2 - 11x + 31) \leq 0$.

16] Биссектрисы внутренних углов при вершинах A и B треугольника ABC пересекают описанную окружность треугольника в точках A_1 и B_1 соответственно, а биссектриса внешнего угла при вершине C пересекает эту окружность в точке L .

а) Докажите, что прямая $B_1 L$ параллельна прямой AA_1 .

б) Найдите длину отрезка $A_1 L$, если $AB = 4$, $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 60^\circ$.

17] В июне 2017 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн. рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 22% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по май каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июне каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

| Месяц и год | Июнь 2017 | Июнь 2018 | Июнь 2019 | Июнь 2020 | Июнь 2021 |
|-------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Долг (в млн. рублей) | S | $0,8S$ | $0,5S$ | $0,2S$ | 0 |

Найдите наименьшее значение S , при котором общая сумма выплат будет больше 27 млн. рублей.

18] Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} a \cdot (y^2 + 2) = x + 1 - y^4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$
 имеет ровно пять различных решений.

19 Дано натуральное четырёхзначное число n , в записи которого нет нулей. Для этого числа составим дробь $f(n)$, в числителе которой само число n , а в знаменателе — произведение всех цифр числа n .

а) Приведите пример такого числа n , для которого $f(n) = \frac{643}{160}$.

б) Существует ли такое n , что $f(n) = \frac{343}{160}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $f(n)$, если она равна несократимой дроби со знаменателем 160?

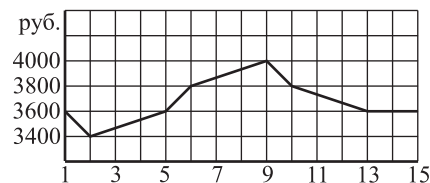
Тест № 13

Часть 1

1 Самолёт Москва — Омск отправляется в 23 : 20 (время московское), а прибывает в 05 : 35 на следующий день (время омское). Сколько часов самолёт находится в пути, учитывая, что смещение времени в Омске относительно Москвы составляет + 3 часа?

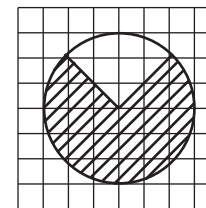
Ответ: _____

2 На рисунке показано изменение биржевой стоимости акций золотодобывающей компании в первые две недели июля. 2 июля бизнесмен приобрёл пакет акций, а затем продал его 10 июля. В результате этих операций его прибыль составила 50400 руб. Сколько акций было в пакете?



Ответ: _____

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см изображён круг, часть которого заштрихована. Найдите площадь S заштрихованной части круга в квадратных сантиметрах. В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.



Ответ: _____

4 В женском спринте на этапе кубка мира по биатлону участвуют 80 спортсменок, среди которых 6 биатлонисток из России. Порядок старта определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что пятнадцатой будет стартовать спортсменка из России.

Ответ: _____

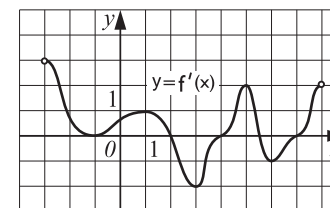
5 Найдите корень уравнения $8^{7-5x} = \frac{1}{512}$.

Ответ: _____

6 В треугольнике ABC : $\angle C = 90^\circ$, $\sin \angle B = \frac{5}{13}$, $BC = 26$, CH — высота. Найдите BH .

Ответ: _____

7 Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3; 8)$. На рисунке изображён график её производной. Укажите точку минимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-2; 7)$.



Ответ: _____

8 В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 12, а длина бокового ребра равна 11. Найдите высоту пирамиды.

Ответ: _____

Часть 2

9] Найдите значение выражения $6 \cdot \sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[5]{81}$.

Ответ: _____

10] Для поддержания навеса планируется использовать цилиндрическую колонну. Давление P , в Паскалях, оказываемое навесом и колонной на опору, вычисляется по формуле: $P = \frac{4mg}{\pi D^2}$, где m — общая масса навеса и колонны в кг, D — диаметр колонны в метрах, а $g = 10 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения. Считая, что $\pi = 3$, определите наименьший возможный диаметр колонны, если $m = 4800$ кг, а давление P , оказываемое на опору, должно быть не больше 256000 Паскаль. Ответ дайте в метрах.

Ответ: _____

11] Велосипедист ехал сначала 3 минуты с горы, а затем 5 минут в гору. Обратный путь он проделал за 16 минут, двигаясь с горы и в гору с теми же скоростями, что и прежде. Во сколько раз скорость велосипедиста при движении с горы была больше, чем скорость в гору?

Ответ: _____

12] Найдите наибольшее значение функции $y = 2012x - 2011 \cos x - 2010$ на отрезке $[-\pi; 0]$.

Ответ: _____

Задания с развёрнутым ответом

13] а) Решите уравнение: $2 \cos 2x + 4 \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{3\pi}{2} \right]$.

14] В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точки M и N — середины боковых рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану основания CE в отношении $5 : 1$, считая от точки C .

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α , если известно, что сторона основания AB равна 18, а боковое ребро SA равно 12.

15] Решите неравенство: $\frac{4}{\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - 9} - \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1} - 3^{x-1} > 0$.

16] В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямыми углами при вершинах A и B расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD , а вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P . Докажите, что $\frac{AP}{DP} = \sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны 4 и 1.

17] В июле планируется взять кредит в банке на сумму 20 млн. рублей на некоторый срок, равный целому числу лет. Условия возврата кредита таковы:

— каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 47 млн. рублей?

18] Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} 2x - 2y + 2 = |x^2 + y^2 - 1| \\ 2ax - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$
 имеет более двух решений.

19] На доске было написано 35 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

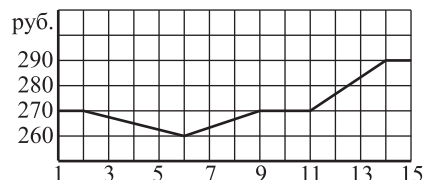
Тест № 14

Часть 1

1 Поезд Иркутск – Казань отправляется в 01 : 07 15 декабря (время иркутское), а прибывает в 15 : 52 17 декабря (время казанское). Сколько часов поезд находится в пути, учитывая, что смещение времени в Иркутске относительно Казани составляет +5 часов?

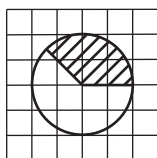
Ответ: _____

2 На рисунке показано изменение биржевой стоимости акций металлургического комбината в первой половине июля. 4 июля бизнесмен приобрёл пакет акций, а затем продал его 14 июля. В результате этих операций его прибыль составила 77000 руб. Сколько акций было в пакете?



Ответ: _____

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см изображён круг, часть которого заштрихована. Найдите площадь S заштрихованной части круга в квадратных сантиметрах. В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.



Ответ: _____

4 Перед первой игрой в шахматном турнире участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в турнире участвует 17 шахматистов, среди которых 3 участника из России. Найдите вероятность того, что в первом туре российский шахматист Александр Дружинин не будет играть с другим шахматистом из России.

Ответ: _____

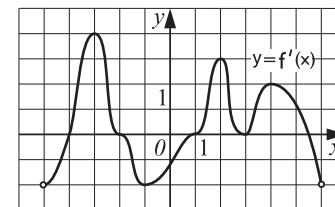
5 Найдите корень уравнения $4^{5-2x} = 0,0625$.

Ответ: _____

6 В треугольнике ABC : $\angle C = 90^\circ$, CH – высота, $BC = 13$, $CH = 12$. Найдите AC .

Ответ: _____

7 Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 6)$. На рисунке изображён график её производной. Укажите точку максимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-4; 5)$.



Ответ: _____

8 В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания равна 6, а длина бокового ребра равна 7,5. Найдите высоту пирамиды.

Ответ: _____

Часть 2

9 Найдите значение выражения $17 \cdot \sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[15]{729}$.

Ответ: _____

10 Опорные «башмаки» шагающего экскаватора, имеющего массу $m = 2520$ т, представляют собой две пустотелые балки длиной $l = 36$ м и шириной S м каждая. Давление P , в кПа, оказываемое экскаватором на почву, определяется формулой $P = \frac{mg}{2lS}$, где m – масса экскаватора (в тоннах), l – длина балок (в метрах), S – ширина балок (в метрах), $g = 10$ м/с² – ускорение свободного падения. Определите наименьшую

возможную ширину опорных балок, если известно, что давление P должно не превышать 280 кПа. Ответ выразите в метрах.

Ответ: _____

11 Моторная лодка плыла сначала 6 минут по озеру, в стоячей воде, а затем 10 минут по реке, против течения. Обратный путь, двигаясь с той же собственной скоростью, лодка прошла за 11 минут. Найдите отношение длины пути, пройденного лодкой по озеру, к длине пути, пройденного ею по реке.

Ответ: _____

12 Найдите наименьшее значение функции $y = 11x + 10 \sin x - 5,5\pi + 9$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Ответ: _____

Задания с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение:

$$2 \cos 4x - 4 \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right) + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC на медиане основания CE взята точка K так, что $CK : KE = 8 : 1$. Через точку K проведена плоскость α , которая перпендикулярна прямой CE и пересекает боковые рёбра SA и SB в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что $MN : AB = 2 : 3$.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием – сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α , если известно, что сторона основания AB равна $9\sqrt{3}$, а боковое ребро SA равно 18.

15 Решите неравенство: $\frac{15}{(2^2 - x^2 + 1)^2} - \frac{8}{2^2 - x^2 + 1} + 1 \geq 0$.

16 В трапеции $ABCD$ углы при вершинах A и B прямые, а боковая сторона CD ровно вдвое длиннее меньшего основания BC . Известно, что

в эту трапецию можно вписать окружность. Построена окружность, которая касается большего основания AD , боковой стороны CD и вписанной окружности трапеции.

а) Прямая, проходящая через центр построенной окружности и центр окружности, вписанной в трапецию, пересекает боковую сторону AB в точке P . Докажите, что $\frac{AP}{BP} = \frac{AD}{BC}$.

б) Найдите радиус построенной окружности, если радиус вписанной в трапецию окружности равен 1.

17 В июле планируется взять кредит в банке на 10 лет. Условия возврата кредита таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На какую сумму планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 38 млн. рублей?

18 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} 4 - x = 2|y| \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$
 имеет более двух решений.

19 На доске написано 19 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 11. Среднее арифметическое всех написанных на доске чисел равно 10. С этими числами произвели следующие действия: чётные числа разделили на 2, а нечётные – умножили на 2. Пусть A – среднее арифметическое полученных чисел.

- а) Могло ли оказаться так, что $A = 17$?
- б) Могло ли оказаться так, что $A = 7$?
- в) Найдите наибольшее возможное значение A .

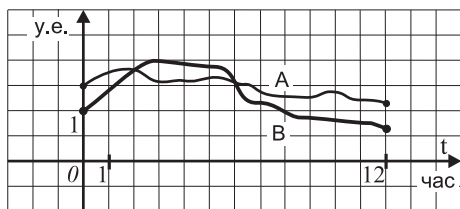
Тест № 15

Часть 1

1 Магазин мужской обуви покупает туфли по оптовой цене 750 руб. за пару, а продаёт по цене 1155 руб. за пару. Сколько процентов составляет торговая наценка в этом магазине?

Ответ: _____

2 На рисунке приведены графики стоимости акций компаний A и B в течении «биржевого» дня. Найдите максимальную протяжённость временного промежутка (в часах), в который стоимость акций компании B была не ниже, чем стоимость акций компании A .



Ответ: _____

3 На клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ изображен угол $\angle ABC$. Найдите площадь S пересечения угла $\angle ABC$ и круга с центром в точке B радиуса 12. В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.



Ответ: _____

4 Юля дважды бросает игральный кубик. В сумме у неё выпало 6 очков. Найдите вероятность того, что при первом броске выпало 2 очка.

Ответ: _____

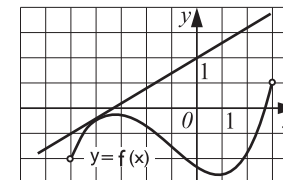
5 Найдите корень уравнения $0,1^{34-4x} = \frac{1}{10000}$.

Ответ: _____

6 В треугольнике ABC : $\angle C = 90^\circ$, CH — высота, $AC = 0,8$, $AH = 0,4$. Найдите $\sin \angle B$.

Ответ: _____

7 Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 3)$. На рисунке изображён её график и касательная к этому графику в точке с абсциссой $x_0 = -4$. Вычислите значение производной $f'(x)$ в точке $x_0 = -4$.



Ответ: _____

8 Высота правильной треугольной пирамиды равна 3, а сторона основания равна 18. Найдите длину апофемы этой пирамиды.

Ответ: _____

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{5,5} \cdot \sqrt{3,3}}{\sqrt{0,15}}$.

Ответ: _____

10 Масса радиоактивного вещества (m) с течением времени меняется по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где T — период полураспада этого вещества, m_0 — масса вещества в момент начала наблюдения, t — время, прошедшее от начала наблюдения. Через 6 мин. после начала опыта масса вещества была равна 176 г, а через 54 мин. после начала опыта масса вещества стала равна 5,5 г. Определите период полураспада T этого изотопа. (Ответ выразите в минутах.)

Ответ: _____

11 К июню кинотеатр города Дивноморска увеличил цену входного билета на 50% по сравнению с ценой билета в январе. На сколько процентов нужно будет снизить цену билета, чтобы в конце сезона она была на 20% выше, чем в январе?

Ответ: _____

12 Найдите наибольшее значение функции $y = 6 \cos x + 3\sqrt{3}x - \sqrt{3}\pi + 5$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: _____

Задания с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение:

$$\sin 2x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin x + \sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

14 В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ и $BC = 2$. Известны длины боковых рёбер пирамиды: $SA = 4\sqrt{2}$, $SB = \sqrt{41}$, $SD = 6$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между плоскостью ASD и прямой SO , где O — точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$.

15 Решите неравенство: $\frac{3^{x+1}}{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x} - \frac{3^x}{2^x - 3^x} \geq 0$.

16 Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причём меньшая окружность проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей окружности в точке P . Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках D и E соответственно.

а) Докажите что прямые DE и BC параллельны.

б) Пусть Q точка пересечения отрезков DE и AP . Найдите AQ , если радиус большей окружности равен 26, а $BC = 48$.

17 Планируется взять кредит 15 января на срок 24 месяца. Условия возврата кредита таковы:

- первого числа каждого месяца долг возрастает на $p\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите p .

18 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy + 4x - y - 12) \cdot \sqrt{x+3}}{\sqrt{9-x}} = 0 \\ x + y - a = 0 \end{cases} \text{ имеет ровно два решения.}$$

19 Ученики школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 30 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 4 балла, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?

б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 40, средний балл участников, сдавших тест, составил 52, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 24. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 50, а не сдавших тест — 26. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

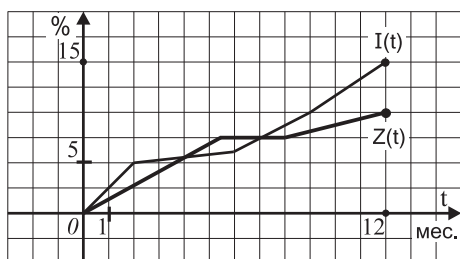
Тест № 16

Часть 1

1 Юбка стоила 1600 рублей. Во время распродажи товара она стала стоить 672 рублей. Сколько процентов составила скидка на юбку?

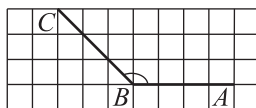
Ответ: _____

2 На рисунке показаны изменение уровня инфляции — $I(t)$ и роста средней заработной платы — $Z(t)$ в течении календарного года. Найдите число месяцев, в которые уровень инфляции превосходил рост средней заработной платы.



Ответ: _____

- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ изображен угол $\angle ABC$. Найдите площадь S пересечения угла $\angle ABC$ и круга с центром в точке B радиуса 8. В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.



Ответ: _____

- 4 Коля дважды бросает игральный кубик. В сумме у него выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что при первом броске выпало не больше 4 очков.

Ответ: _____

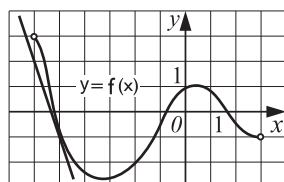
- 5 Найдите корень уравнения $(0,2)^{21-3x} = \frac{1}{125}$.

Ответ: _____

- 6 В треугольнике ABC : $\angle C = 90^\circ$, высота CH равна 3, $\text{ctg} \angle B = 0,75$. Найдите AH .

Ответ: _____

- 7 Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 3)$. На рисунке изображён её график и касательная к этому графику в точке с абсциссой $x_0 = -5$. Вычислите значение производной $f'(x)$ в точке $x_0 = -5$.



Ответ: _____

- 8 Высота правильной шестиугольной пирамиды равна 2, сторона основания равна $\sqrt{3}$. Найдите длину апофемы этой пирамиды.

Ответ: _____

Часть 2

- 9 Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{7,2} \cdot \sqrt{4,8}}{\sqrt{0,54}}$.

Ответ: _____

- 10 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса с течением времени меняется по закону: $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — масса изотопа в момент начала наблюдения, t — время в минутах, прошедшее от начала наблюдения, T — период полураспада этого изотопа, в минутах. Проводится опыт по наблюдению за распадом изотопа с периодом полураспада $T = 12$ минут. Через 5 минут после начала опыта масса изотопа стала равна 120 мг. Через какое минимальное время после начала опыта масса изотопа будет не более 7,5 мг? Ответ дайте в минутах.

Ответ: _____

- 11 В апреле мобильный телефон стоил на 10% больше, чем в июле, а в июле он стоил на 15% больше, чем в декабре. На сколько процентов стоимость телефона в апреле была выше, чем стоимость телефона в декабре?

Ответ: _____

- 12 Найдите наименьшее значение функции

$$y = 6 + \frac{7\sqrt{3}}{2} + \frac{7\pi}{12} - 7 \cos x - 3,5x \text{ на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Ответ: _____

Задания с развёрнутым ответом

- 13 а) Решите уравнение:

$$\sin 2x \cdot \cos x - \sin x + \cos 2x = 0.$$

- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

14 В основании пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$, сторона которого равна 8, а угол при вершине A равен 60° . Известно, что $SA = 15$, $SC = \sqrt{33}$ и, кроме того, $SB = SD$.

а) Докажите, что SC – высота пирамиды.

б) Найдите угол между плоскостью ASC и ребром SB .

15 Решите неравенство: $\frac{4^{x-1}}{5^x - 4^x} - \frac{5^x}{2 \cdot 5^x + 4^{x+1}} \geq 0$.

16 Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причём меньшая окружность проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей окружности в точке P . Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках D и E соответственно.

а) Докажите, что $\frac{BP}{AB} = \frac{CP}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

б) Пусть Q – точка пересечения отрезков DE и AP . Найдите площадь треугольника ABC , если $AQ = \sqrt{10}$, а радиус большей окружности равен 10.

17 Планируется взять кредит 15 января на некоторый срок, равный целому числу месяцев. Условия возврата кредита таковы:

- первого числа каждого месяца долг возрастает на 2,5% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения на 20% больше суммы, взятой в кредит.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(x^2 + 3xy - 2x - 6y + 16 - a^2) \cdot \sqrt{x+4}}{\sqrt{8-x}} = 0 \\ x + y - a = 0 \end{cases} \text{ имеет ровно одно решение.}$$

19 Ученики школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест,

если он набрал не менее 40 баллов. При обработке результатов теста выяснилось, что решение одной задачи списано всеми школьниками с какой-то из работ. Комиссия решила не засчитывать баллы по этой задаче, и результат каждого участника уменьшился на 5 баллов.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, повысился?

б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, повысился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже повысился?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 50, средний балл участников, сдавших тест, составил 56, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 26. После уменьшения баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 52, а не сдавших тест – 24. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

Ответы к заданиям 9-12

| № | 9 | 10 | 11 | 12 |
|----|-------|---------|------|-------|
| 41 | 64 | 0,03125 | 8 | 1,5 |
| 42 | 81 | 0,3 | 15 | 0,2 |
| 43 | 3 | 16200 | 11 | 9 |
| 44 | 0,2 | 125 | 10 | -0,2 |
| 45 | 0,25 | 60 | 65,5 | 99 |
| 46 | 0,5 | 20 | 72,5 | -15 |
| 47 | 20,25 | 25 | 2 | -0,25 |
| 48 | 192 | 45 | 4 | 10 |
| 49 | 108 | 600 | 120 | 6 |
| 50 | 112 | 501 | 75 | 8 |

Ответы к заданиям №13 – №19

Тест №1

13. а) $x = 1,5$, $x = 1 + 0,5 \log_3 5$; б) $1 + 0,5 \log_3 5$. 14. $\arccos \frac{2}{\sqrt{17}}$
 15. $x \in [-3; -2) \cup (2; 3]$ 16. 25,92 17. $\frac{1}{18} < \delta < \frac{1}{17}$ 18. $a \in \left[\frac{\sqrt{21} - 3}{3}; 2 \right)$
 19. а) да; б) нет; в) 3.

Тест №2

13. а) $x = 1,5$, $x = 0,5(1 + \log_2 3)$; б) $0,5(1 + \log_2 3)$. 14. $\arccos \frac{5}{13}$
 15. $x \in (-\infty; -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}; +\infty)$ 16. 168,48
 17. $\frac{\sqrt{132} - 11}{11} < p < \frac{\sqrt{110} - 10}{10}$ 18. $a \in \left(\frac{1 + \sqrt{51}}{5}; 2,5 \right)$
 19. а) нет; б) да; в) 6.

Тест №3

13. а) $x = 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ б) $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, 0 , $\frac{\pi}{2}$ 14. 1 : 1 (или 1)
 15. $x \in (0; \log_4 3] \cup (\pi; 4) \cup (4; \log_2 17)$ 16. 8 17. 10 18. $a \in (0,5; 1] \cup [3; 3,5)$
 19. а) нет; б) да; в) 9.

Тест №4

13. а) $x = \pi n$, $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$ б) $\frac{2\pi}{3}$, π , $\frac{5\pi}{3}$ 14. 7 : 20 (или 0,35)
 15. $x \in (0; \pi) \cup (5; \log_2 72] \cup (2\pi; 9) \cup (3\pi; 10)$ 16. 21 17. 3690
 18. $a \in (-3; -0,5] \cup [-0,25; 2,5)$ 19. а) да; б) нет; в) 8.

Тест №5

13. а) $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $x = -\arccos \frac{2}{5} + 2\pi n$, $n \in Z$ б) $-\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$,
 $-\arccos \frac{2}{5}$ 14. $\pi - \arccos \frac{\sqrt{5}}{15}$ 15. $3 \leq x \leq 23$, $x \in Z$ 16. 36 17. 500
 18. $a \in (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$ 19. а) 20 чел. писали обе работы и получили по 20 балл. за каждую, по 5 чел. писали только 1-ую и только 2-ую работы, получив по 0 балл.; б) нет; в) 14,4.

Тест №6

13. а) $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \arctg \frac{3}{2} + \pi + 2\pi n$, $n \in Z$ б) $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4}$,
 $\pi + \arctg \frac{3}{2}$ 14. $\pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{21}}$ 15. $3 \leq x \leq 12$, $x \in Z$ 16. 0,8 17. 200
 18. $a \in [-18; -1]$ 19. а) 14 чел. писали обе работы и получили по 20 балл. за каждую, по 7 чел. писали только 1-ую и только 2-ую работы, получив по 5 балл.; б) нет; в) $\frac{345}{28}$.

Тест №7

13. а) $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in Z$; б) $\frac{7\pi}{4}$. 14. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$
 15. $x \in (-\infty; 0] \cup (\log_6 5; \log_6 7)$ 16. $\frac{20412}{845}$ 17. 16
 18. $a \in \left[-\frac{13}{3}; -3 \right) \cup (-3; 3) \cup \left(3; \frac{13}{3} \right]$ 19. а) нет; б) да; в) 6.

Тест №8

13. а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = (-1)^n \arcsin \frac{2}{9} + \pi n$, где $n \in Z$; б) $\frac{\pi}{2}$; $\pi - \arcsin \frac{2}{9}$
 14. $\frac{112}{3\sqrt{65}}$ 15. $x \in [\log_2 11 - 2; 1,5) \cup (\log_2 3; +\infty)$ 16. 20,665
 17. 11 18. $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1]$ 19. а) да; б) нет; в) 7.

Тест №9

13. а) $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $x = \arctg 9 + \pi n$, где $n \in Z$; б) $\frac{\pi}{3}$, $\arctg 9$. 14. $15\sqrt{3}$
 15. $x \in (-\infty; \log_7 2] \cup [\log_7 3; 1] \cup (\log_7 9; +\infty)$ 16. $3\sqrt{2}$ 17. 23 18. $a = 9$
 19. а) нет; б) нет; в) 2.

Тест №10

13. а) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \arctg \sqrt[4]{10} + 2\pi n$, где $n \in Z$; б) $\arctg \sqrt[4]{10}$.
 14. 33,75 15. $x \in \left[\frac{1}{3} \log_4 6; \log_4 6\right) \cup [\log_4 7; +\infty)$ 16. $\frac{68}{13}$ 17. 32
 18. $a \in (4; 8 - \sqrt{12})$ 19. а) да; б) нет; в) 4.

Тест №11

13. а) $x = 2$, $x = \log_3 6$; б) $x = \log_3 6$. 14. $\frac{4}{\sqrt{13}}$
 15. $x \in \left(-\frac{7}{3}; -2\right) \cup \{1\} \cup \left[\frac{20}{17}; +\infty\right)$ 16. $12 \cos 15^\circ (= 6\sqrt{2 + \sqrt{3}})$ 17. 48
 18. $a = 1$ 19. а) 238; б) нет; в) $\frac{641}{24}$.

Тест №12

13. а) $x = 1$, $x = \log_2 12$; б) $x = \log_2 12$. 14. 132
 15. $x \in (-1,25; -1) \cup [0; 5] \cup [\sqrt{33}; 6]$ 16. $\frac{2}{\sin 70^\circ}$ 17. 18 18. $a = -1$
 19. а) 3858; б) нет; в) $\frac{489}{160}$.

Тест №13

13. а) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in Z$; б) $\frac{7\pi}{6}$. 14. $90\sqrt{3}$ 15. $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$
 16. $\frac{1044}{7}$ 17. 8 18. $0,5 \leq a \leq 0,75$ 19. а) да; б) да; в) 18.

Тест №14

13. а) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in Z$; б) $-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ 14. 252
 15. $x \in (-\infty; -1] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$ 16. $\frac{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}}$ 17. 16 млн.
 18. $3,2 < a \leq 16$ 19. а) да; б) нет; в) $19 \frac{16}{19}$.

Тест №15

13. а) $x = 2\pi n$, $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in Z$; б) $\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$.
 14. $\arctg \frac{\sqrt{33}}{22}$ 15. $0 < x < 1$ 16. $2\sqrt{26}$ 17. 2,4
 18. $a \in (-9; 1] \cup \{11\} \cup [13; 15)$ 19. а) да; б) да; в) 28.

Тест №16

13. а) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in Z$; б) $\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}$.
 14. $\arctg \frac{4}{9}$ 15. $0 < x \leq \frac{1}{\log_2 5 - 2}$ 16. 32 17. 15
 18. $a \in (-\infty; -16] \cup [10; +\infty)$ 19. а) да; б) да; в) 20.

Тест №17

13. а) $x = \pi n$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$ б) $-\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$ 14. $\arctg \sqrt{2}$
 15. $x \in [3; 11]$ 16. 14,4 17. 2300000 18. $a = -1, a = 7$
 19. а) да, например, $n = 60$; б) $2^6 \cdot 7$ и $7^6 \cdot 2$; в) да, например, $2 \cdot 19^{18} \cdot 53^{52}$.

Тест №18

13. а) $x = \pi n$, $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$ б) $-\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ 14. $\arctg \frac{5}{3\sqrt{2}}$
 15. $x \in (3; 4) \cup (4; 4,5] \cup [5; 6)$ 16. 10 17. 625000 18. $a = 5$
 19. а) $n = 13^{12}$; б) 240; в) да, например, $3^2 \cdot 11^{10} \cdot 61^{60}$.

Тест №19

13. а) $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ б) $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}$ 14. 54
 15. $x \in (-1; 0) \cup (10; 11]$ 16. $4\sqrt{3}$ 17. 6 18. $a < 0,6$ и $a > 1$ 19. а) 1; б) 2013

Тест №20

13. а) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$ б) $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$ 14. 24
 15. $x \in (-\infty; -1) \cup [3; +\infty)$ 16. 4 или 16 17. 5 18. $a \in \left[0,5; \frac{30}{7}\right] \cup \left(\frac{30}{7}; 6,4\right)$
 19. а) 2; б) 2014