Д.А. Мальцев,
А.А. Мальцев,
Л.И. Мальцева

МАТЕМАТИКА

Подготовка к ЕГЭ 2025

Профильный уровень

Решебник

Издатель Мальцев Д.А.
Ростов-на-Дону

Народное образование
Москва
2025

От авторов

В данном пособии приведены полные решения заданий с развёрнутым ответом для всех тестов с нечётными номерами (т.е. тестов №1, №3 и т.д.), а также решения всех заданий с нечётными номерами из Задачника книги «Математика. Подготовка к ЕГЭ 2025. Профильный уровень. Книга 2». Кроме того, в Решебнике даны указания и краткие решения к задачам №17 (планиметрия) и задачам №19 (олимпиадная тематика) тестов с чётными номерами.

Все решения написаны достаточно подробно, в стиле беседы с читателем. Отметим, что хотя на экзамене при оформлении решений требуется меньшая степень подробности, чем выбрана авторами, Вы можете «взять на вооружение» и с успехом использовать некоторые из приёмов и стиль оформления решений, которые использованы в данной книге. Например, ключевые слова и фразы, наподобие «следовательно», «значит», «таким образом», «так как ..., то...», помогут Вам более упорядоченно излагать свои мысли. И вполне возможно, что вследствие этого Вы станете совершать меньшее количество ошибок и быстрее приходить к правильному ответу.

Данное пособие поможет ученикам приобрести устойчивые навыки в решении ряда заданий и существенно повысить уровень математической культуры. А это, в свою очередь, будет способствовать не только успешной сдаче последующих экзаменов, но также окажет неоценимую помощь в дальнейшем обучении — вне зависимости от выбранного ВУЗа и специальности.

Желаем Вам успеха!

Авторы благодарят рецензентов за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

Глава I

Решения к тестам

Десять страниц математики понятой лучше ста страниц, заученных на память, а одна страница, самостоятельно проработанная, лучше десяти страниц, понятых отчётливо, но пассивно.

Д. Юнг

Тест №1

13. а) Решите уравнение $2\sin^2 x - \sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) - 1 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$.

Решение.

а) Заметив, что $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$, преобразуем исходное уравнение: $2\left(1 - \cos^2 x\right) + \cos x - 1 = 0$, $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$. Полученное уравнение является квадратным относительно неизвестной $t = \cos x :\ 2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ или $t = -\dfrac{1}{2}$.

Итак, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \quad (1), \\ \cos x = -\dfrac{1}{2}\ (2). \end{array}\right.$$

Решением уравнения (1) являются $x = 2\pi n$, где $n \in Z$; решением уравнения (2) являются $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in Z$.

б) Проведём отбор корней исходного уравнения, принадлежащих отрезку $[-3\pi; -\pi]$, в каждой из трёх найденных выше серий корней.

Среди корней $x = 2\pi n$, где $n \in Z$, отрезку $[-3\pi; -\pi]$ принадлежит, очевидно, только корень $x = -2\pi$.

Корень $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$ принадлежит отрезку $[-3\pi; -\pi]$ в том и только том случае, если $-3\pi \leqslant \left(\dfrac{2}{3} + 2n\right)\pi \leqslant -\pi \Leftrightarrow -3 - \dfrac{2}{3} \leqslant 2n \leqslant -1 - \dfrac{2}{3}$ $\Leftrightarrow -\dfrac{11}{6} \leqslant n \leqslant -\dfrac{5}{6}$. Так как $n \in Z$, то эти неравенства выполнены только при $n = -1$, т.е. $x = \dfrac{2\pi}{3} - 2\pi = -\dfrac{4\pi}{3}$.

Аналогично, корень $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$ принадлежит отрезку $[-3\pi; -\pi]$ в том и только том случае, если $-3 \leqslant -\dfrac{2}{3} + 2n \leqslant -1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -3 + \dfrac{2}{3} \leqslant 2n \leqslant -1 + \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{7}{6} \leqslant n \leqslant -\dfrac{1}{6}$. Так как $n \in Z$, то эти неравенства выполнены только при $n = -1$, т.е. $x = -\dfrac{2\pi}{3} - 2\pi = -\dfrac{8\pi}{3}$.

Ответ: а) $x = 2\pi n$, $x = \pm\dfrac{2}{3}\pi + 2\pi n$, где $n \in Z$; б) $-2\pi; -\dfrac{4\pi}{3}; -\dfrac{8\pi}{3}$.

14. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точка O — центр основания пирамиды, точка M — середина ребра SC, $AB = 12$, $SO = 4\sqrt{33}$.

а) Докажите, что плоскость OMB параллельна прямой SA.

б) Прямая, по которой пересекаются плоскости OMB и OAS, пересекает грань SBC в точке P. Найдите длину отрезка OP.

Решение.

а) Пусть K — точка пересечения прямой BO с ребром AC, тогда MK — линия пересечения плоскостей BOM и ASC, см. ниже рисунок 1.
Так как O — центр правильного треугольника ABC, то K — середина AC. Значит, MK — средняя линия $\triangle ASC$, и поэтому $MK \parallel AS$.

Так как плоскость OMB содержит прямую MK, параллельную AS, то плоскость OMB и прямая AS параллельны, ч.т.д.

рис. 1

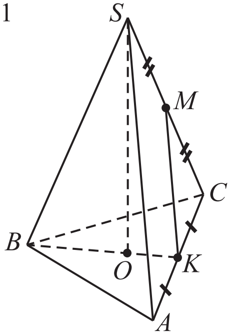
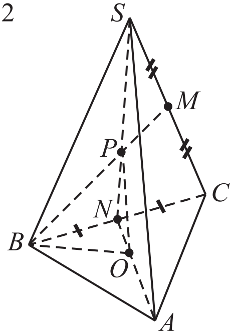


рис. 2



б) Пусть N — точка пересечения прямой AO с ребром BC. Плоскость OMB пересекает грань SBC по прямой BM, а плоскость OAS пересекает грань SBC по прямой SN, см. выше рисунок 2. Значит, точка пересечения прямых BM и SN является общей точкой этих плоскостей, т.е. это та самая точка P, которая дана в условии (точка пересечения грани SBC с линией пересечения плоскостей OMB и OAS).

Так как отрезки BM и SN — медианы $\triangle BSC$, то $NP : PS = 1 : 2$. А поскольку O — центр $\triangle ABC$, то $NO : OA = 1 : 2$. Из этих равенств следует, что $\triangle NPO$ подобен $\triangle NSA$ с коэффициентом подобия, равным $NP : NS = 1 : 3$. Значит, $PO = \dfrac{1}{3}AS$.

Вычислим длину ребра AS. По теореме Пифагора $AS^2 = AO^2 + SO^2$. Из правильного $\triangle ABC$ имеем: $AO = \left(AB\sqrt{3}\right)/3 = \left(12\sqrt{3}\right)/3 = 4\sqrt{3}$. Итак, $AS^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + \left(4\sqrt{33}\right)^2 = 4^2 \cdot (3 + 33) = 16 \cdot 36$, $AS = 4 \cdot 6 = 24$.

Таким образом, $PO = \dfrac{1}{3}AS = \dfrac{1}{3} \cdot 24 = 8$.

Ответ: 8

15. Решите неравенство $10^x + 11 - \dfrac{2 \cdot 10^{x+1} - 12}{100^x - 10^{x+1} + 9} \leqslant \dfrac{1}{10^x - 1}$.

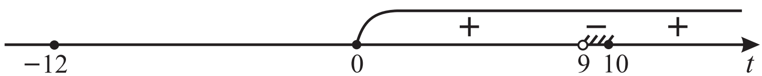
Решение.

Относительно неизвестной $t = 10^x$ $(t > 0)$ данное в условии неравенство имеет вид: $t + 11 - \dfrac{20t - 12}{t^2 - 10t + 9} \leqslant \dfrac{1}{t-1}$. Заметив, что $t^2 - 10t + 9 = (t-1)(t-9)$, преобразуем это неравенство следующим образом:

$$t + 11 \leqslant \frac{20t - 12}{(t-1)(t-9)} + \frac{t-9}{(t-1)(t-9)} \Leftrightarrow t + 11 \leqslant \frac{21(t-1)}{(t-1)(t-9)} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t + 11 \leqslant \dfrac{21}{t-9} \\ t \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(t+11)(t-9) - 21}{t-9} \leqslant 0 \\ t \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t^2 + 2t - 120}{t-9} \leqslant 0. \\ t \neq 1. \end{cases}$$

Полученное неравенство решим методом интервалов. Корнями квадратного трёхчлена $t^2 + 2t - 120$ являются $t = -12$ и $t = 10$. Отмечая на числовой оси точки $t = -12$, $t = 9$ и $t = 10$ (см. рисунок ниже), и учитывая, что $t > 0$, получаем, что решением этого неравенства являются $t \in (9; 10]$.



Возвращаясь к неизвестной x, получаем, что данное в условии неравенство равносильно следующему двойному неравенству: $9 < 10^x \leqslant 10 \Leftrightarrow \lg 9 < x \leqslant 1$.

Ответ: $x \in (\lg 9; 1]$

16. Андрей открыл вклад в банке, по которому банк выплачивает 20% годовых. По договору вклада он может производить расходные операции (снимать с вклада деньги) не чаще одного раза в год (после начисления банком процентов). В конце первого года Андрей снял с вклада 480000 рублей, в конце второго года он снял 720000 рублей, а в конце третьго года он полностью закрыл вклад (снял все имеющие на вкладе деньги), сняв 3456000 рублей. Какую сумму (в рублях) вносил Андрей при открытии вклада?

Решение.

Пусть X — искомая сумма, измеряемая в тысячах рублей. Тогда в конце первого года после начисления банком процентов сумма на вкладе Андрея была равна $1{,}2X$, а после снятия 480 тыс. руб. на вкладе осталась сумма $1{,}2X-480$. Далее аналогично получаем, что в конце второго года после снятия Андреем денег на вкладе осталась сумма $1{,}2\cdot(1{,}2X-480)-720$, а в конце третьего года — $1{,}2\cdot(1{,}2\cdot(1{,}2X-480)-720)-3456$, что по условию составило 0 руб. Таким образом, имеем следующее уравнение: $1{,}2\cdot(1{,}2\cdot(1{,}2X-480)-720)=3456 \Rightarrow 1{,}2\cdot(1{,}2X-480)-720=\dfrac{3456}{1{,}2}$ $\Rightarrow 1{,}2X-480=\dfrac{3456}{1{,}2^2}+\dfrac{720}{1{,}2} \Rightarrow X=\dfrac{3456}{1{,}2^3}+\dfrac{720}{1{,}2^2}+\dfrac{480}{1{,}2}$. Окончательно получаем, что $X=2000+500+400=2900$ тыс. руб.

Ответ: 2900000

Примечание. Если имеется вклад на X руб., который полностью расходуется за n ежегодных выплат, равных $v_1, v_2, ..., v_n$, осуществяемых после начисления банком p процентов по вкладу, то, как несложно усмотреть из выкладок приведённого выше решения, для величины X имеет место равенство: $X=\dfrac{v_1}{1+0{,}01p}+\dfrac{v_2}{(1+0{,}01p)^2}+...+\dfrac{v_n}{(1+0{,}01p)^n}$.

17. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность, и при этом его диагонали AC, BD и CE равны друг другу. Диагонали BE и AD пересекаются в точке M.

а) Докажите, что четырёхугольник $BCDM$ — параллелограмм.

б) Найдите сторону AB, если известно, что $BC=6$, $BE=16$, $AD=14$.

Решение.

а) Так как хорды AC и BD равны, то равны дуги, которые эти хорды стягивают, $\overset{\smile}{ABC}=\overset{\smile}{BCD}$, см. данный ниже рисунок 1. Вычитая из этих дуг их общую часть — дугу BC, получаем, что равны дуги $\overset{\smile}{AB}$ и $\overset{\smile}{CD}$. Отсюда следует, что $\angle BCA = \angle DAC$ (как углы, опирающиеся на равные дуги). Поэтому $BC \parallel AD$ (по равенству накрест-лежащих углов). Аналогично из равенств хорд BD и CE получаем, что $CD \parallel BE$. Значит, $BCDM$ — параллелограмм, ч.т.д.

рис. 1

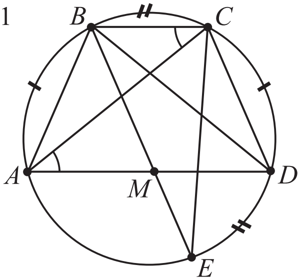
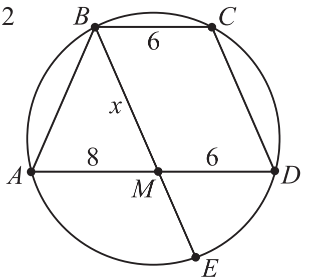


рис. 2



б) Так как $BCDM$ — параллелограмм, то $DM = BC = 6 \Rightarrow AM = AD - DM = 8$. Пусть $BM = x$, тогда $ME = BE - BM = 16 - x$, см. выше рисунок 2. Согласно известному свойству пересекающихся хорд окружности $AM \cdot DM = BM \cdot EM$, т.е. $6 \cdot 8 = x \cdot (16 - x)$. Полученное уравнение $x^2 - 16x + 48 = 0$ имеет корни $x = 4$ и $x = 12$, т.е. $BM = 4$ или $BM = 12$.

Заметим, что из равенства $BM = CD$ (как противоположные стороны параллелограмма) и равенства $CD = AB$ (как отрезки, стягивающие равные дуги) следует, что $AB = BM$. Поэтому случай $BM = 4$ невозможен: в этом случае $AB + BM = 8 = AM$ — нарушается неравенство треугольника. Значит, $BM = 12$.

Ответ: 12

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x + y = a \\ |y| = |x^2 - 4x + 6| \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Решение.

Данную задачу будем решать графически.

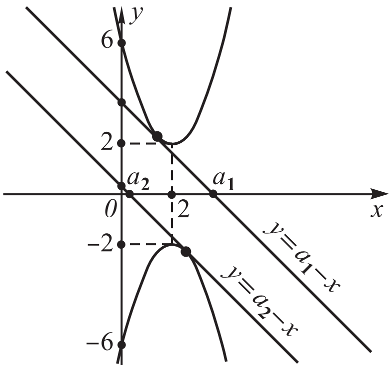
Уравнение $|y| = |x^2 - 4x + 6|$ задаёт множество точек, координаты которых удовлетворяют одному из двух равенств:

$$\left[\begin{array}{ll} y = x^2 - 4x + 6, & (1); \\ y = -\left(x^2 - 4x + 6\right), & (2). \end{array}\right.$$

Равенства (1) и (2) являются уравнениями парабол, которые симметричны друг другу относительно оси Ox.

Первое из уравнений данной в условии системы запишем в следующем виде: $y = a - x$. Это уравнение определяет прямую, параллельную прямой $y = -x$, и пересекающую оси координат в точках $(a; 0)$ и $(0; a)$.

На данном ниже рисунке изображены параболы (1) и (2), а также прямые $y = a_1 - x$ и $y = a_2 - x$, которые являются касательными к параболам (1) и (2) соответственно. Исследуем взаимное расположение прямой $y = a - x$ и парабол (1), (2) при различных значениях a.



При $a > a_1$ прямая $y = a - x$ расположена выше прямой $y = a_1 - x$, и поэтому имеет ровно две общие точки с параболой (1).

При $a < a_2$ прямая $y = a - x$ расположена ниже прямой $y = a_2 - x$, и поэтому имеет ровно две общие точки с параболой (2).

Если же $a_2 \leqslant a \leqslant a_1$, то прямая $y = a - x$ имеет либо одну общую точку с параболами (1) и (2) (при $a = a_1$ и $a = a_2$), либо вообще не имеет общих точек с этими параболами (при $a_2 < a < a_1$).

Таким образом, искомые значения a — это $a \in (-\infty; a_2) \cup (a_1; +\infty)$.

Значения a_1 и a_2, соответствующие указанным выше касательным, найдём из условия единственности решения соответствующих уравнений.

Уравнение $a - x = x^2 - 4x + 6$ имеет единственное решение $\Leftrightarrow$ дискриминант трёхчлена $x^2 - 3x + (6 - a)$ равен нулю $\Leftrightarrow 9 - 4(6 - a) = 0$, $6 - a = 2{,}25 \Rightarrow a_1 = 3{,}75$.

Уравнение $a - x = -\left(x^2 - 4x + 6\right)$ имеет единственное решение $\Leftrightarrow$ дискриминант трёхчлена $x^2 - 5x + 6 + a$ равен нулю $\Leftrightarrow 25 - 4(6 + a) = 0$, $6 + a = 6{,}25 \Rightarrow a_2 = 0{,}25$.

Итак, искомые значения a — это $a \in (-\infty; 0{,}25) \cup (3{,}75; +\infty)$.

19. На ювелирном заводе была произведена огранка партии сапфиров, при которой было получено 22 камня по 9 карат каждый и 7 камней по 12 карат каждый. Затем все эти сапфиры были уложены в две одинаковые коробки (часть камней в одну коробку, а оставшиеся — в другую).

а) Может ли разность масс этих двух коробок составлять 16 карат?

б) Могут ли массы этих двух коробок оказаться равными?

в) Какое наименьшее значение может иметь модуль разности масс этих коробок (в каратах), если известно, что их массы различны?

Решение.

а) Заметим, что масса каждого из камней (в каратах) кратна числу 3 (9 кратно 3 и 12 кратно 3). Поэтому общая масса всех камней в каждой из коробок будет кратна 3. А значит, и разность этих масс должна быть кратна 3. Но число 16 не кратно 3, поэтому разность масс коробок с сапфирами не может составлять 16 карат.

б) Масса всех сапфиров равна $22 \cdot 9 + 7 \cdot 12 = 198 + 84 = 282$ карат. Массы коробок окажутся равны, если масса сапфиров в каждой из них будет равна 141 карат. Пример такого распределения сапфиров по коробкам существует. Если в одну из коробок положить 9 камней по 9 карат и 5 камней по 12 карат, а все остальные сапфиры положить в другую коробку, то масса всех сапфиров в первой коробке составит $9 \cdot 9 + 5 \cdot 12 = 141$ карат (при этом масса всех камней во второй коробке автоматически окажется равна 141 карат, т.к. масса камней в обеих коробках равна 282 карат).

в) Как отмечено в пункте а), разность масс коробок (в каратах) обязательно кратна числу 3. Заметим, что эта разность также обязательно чётна. В самом деле, если m — масса всех камней в меньшей по весу коробке, а d — разность масс коробок, то общая масса камней в обеих коробках равна $m + (m + d)$ карат, а с другой стороны, как подсчитано в пункте б), эта масса равна 282 карат, т.е. $2m + d = 282$. Отсюда получаем, что $d = 282 - 2m$ и, значит, d кратно 2.

Так как разность масс коробок (в каратах) обязательно кратна 3 и кратна 2, то она обязательно кратна 6. Поэтому если эта разность отлична от нуля, то она не меньше 6 карат.

Приведём пример, показывающий, что разность масс коробок может составлять 6 карат. Если в одну из коробок положить 14 камней по 9 карат и 1 камень в 12 карат, а все остальные камни положить в другую коробку, то масса камней в первой коробке будет равна $14 \cdot 9 + 1 \cdot 12 = 138$ карат, масса камней во второй коробке будет равна $282 - 138 = 144$ карат, а разность этих масс будет равна $144 - 138 = 6$ карат.

Ответ: а) нет; б) да; в) 6.

Примечание. Построение требуемого примера в пункте в) осуществляется с использованием полученного выше равенства $2m + d = 282$, где m — масса всех камней в меньшей по весу коробке, а d — разность масс коробок. При $d = 6$ из этого равенства получаем, что $m = 138$. Далее для подбора камней в меньшую по весу коробку требуется найти такие натуральные числа $a \leqslant 22$ (число камней массой 9 карат) и $b \leqslant 7$ (число камней массой 12 карат), что $9a + 12b = 138$, или, сокращая на 3, $3a + 4b = 46$.

Тест № 3

13. а) Решите уравнение $\sin 2x - \sin(x - 7\pi) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\frac{7\pi}{2}; 6\pi\right)$.

Решение.

а) Так как $\sin(x-7\pi) = -\sin(7\pi-x) = -\sin x$, а $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, то исходное уравнение преобразуется к виду:

$$2\sin x \cos x + \sin x = 0,\ \sin x \cdot (2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = 0, & (1); \\ \cos x = -\frac{1}{2}, & (2). \end{array}\right.$$

Решением уравнения (1) являются $x = \pi n$, где $n \in Z$;

решением уравнения (2) являются $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in Z$.

б) Проведём отбор корней исходного уравнения, принадлежащих отрезку $[-3\pi; -\pi]$, в каждой из трёх найденных выше серий корней.

Среди корней $x = \pi n$, где $n \in Z$, промежутку $\left(\frac{7\pi}{2}; 6\pi\right)$ принадлежат, очевидно, только корни $x = 4\pi$ и $x = 5\pi$.

Корень $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ принадлежит промежутку $\left(\frac{7\pi}{2}; 6\pi\right)$ в том и только том случае, если $\frac{7\pi}{2} < \left(\frac{2}{3} + 2n\right)\pi < 6\pi \Leftrightarrow \frac{7}{2} - \frac{2}{3} < 2n < 6 - \frac{2}{3}$ $\Leftrightarrow \frac{17}{12} < n < \frac{8}{3}$. Так как $n \in Z$, то эти неравенства выполнены только при $n = 2$, т.е. $x = \frac{2\pi}{3} + 4\pi = \frac{14\pi}{3}$.