Содержание

От авторов

В данном пособии приведены полные решения заданий с развёрнутым ответом для всех тестов с нечётными номерами (т.е. тестов №1, №3 и т.д.), а также решения всех заданий с нечётными номерами из Задачника книги «Математика. ЕГЭ 2021. Книга 2. Профильный уровень». Кроме того, в Решебнике даны указания и краткие решения к задачам №16 (планиметрия) и №19 (олимпиадная тематика) тестов с чётными номерами.

Все решения написаны достаточно подробно, в стиле беседы с читателем. Отметим, что хотя на экзамене при оформлении решений требуется меньшая степень подробности, чем выбрана авторами, Вы можете «взять на вооружение» и с успехом использовать некоторые из приёмов и стиль оформления решений, которые использованы в данной книге. Например, ключевые слова и фразы, наподобие «следовательно», «значит», «таким образом», «так как ..., то...», помогут Вам более упорядоченно излагать свои мысли. И вполне возможно, что вследствие этого Вы станете совершать меньшее количество ошибок и быстрее приходить к правильному ответу.

Данное пособие поможет ученикам приобрести устойчивые навыки в решении ряда заданий и существенно повысить уровень математической культуры. А это, в свою очередь, будет способствовать не только успешной сдаче последующих экзаменов, но также окажет неоценимую помощь в дальнейшем обучении — вне зависимости от выбранного ВУЗа и специальности.

Желаем Вам успеха!

Авторы благодарят рецензентов за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

Возможны два случая: $a > b_1$ или $a < b_1$. В 1-ом случае минимум суммы $2a + b_1 + b_2 + \ldots + b_6$ достигается при $b_1 = 1$, $a = 33$ и равен: $2\cdot 33+1+17+9+13+11+12=129$. Во 2-ом случае минимум суммы достигается при $a = 1$, $b_1=33$ и равен $2\cdot1+33+17+25+21+23+22=143$. Так как $129 \cdot 3 = 387 < 143 \cdot 3$, то наименьшее число конфет у восьми ребят равно 387.

Ответ: а) да; б) нет; в) 387.

Тест № 5

13. а) Решите уравнение:

$$2\log_2^2(\cos 2x) + 2\log_2(\cos 2x) + \log_2(2\cos 2x) = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Так как $\log_2(2\cos 2x) = \log_2(\cos 2x)+1$, то, делая замену неизвестной $t=\log_2(\cos 2x)$, получаем уравнение: $2t^2+3t+1=0$. Корнями этого уравнения являются $t_1 = -1$ и $t_2 = -\frac{1}{2}$. Возвращаясь к неизвестному x, получаем: $\log_2(\cos 2x) = -1$ или $\log_2(\cos 2x) = -\frac{1}{2}$.

Решим уравнение $\log_2(\cos 2x)=-1$: $\cos 2x = 2^{-1}=\frac{1}{2}$, $2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, где $n\in Z$. А из уравнения $\log_2(\cos 2x) = -\frac{1}{2}$ получаем: $\cos 2x = 2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $2x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{8}+\pi n$, где $n\in Z$.

б) Проведём отбор корней из серий $x = \pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, где $n \in Z$, принадлежащих отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$. Для этого на тригонометрическом круге отметим точки, соответствующие чётным значениям $n = 2k$ и нечётным значениям $n = 2k+1$, см. рисунок 1. По рисунку видим, что в указанный промежуток попадают три корня: $\frac{\pi}{6}-2\pi=-\frac{11\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}-2\pi=-\frac{7\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}-2\pi=-\frac{5\pi}{6}$.

рис.1

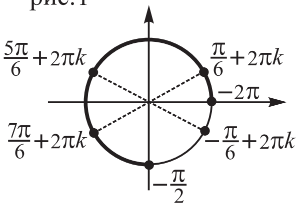
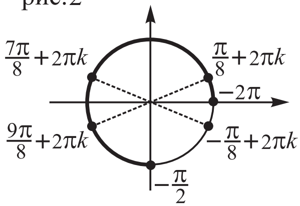


рис.2



Проведя аналогично отбор корней из серий $x = \pm\dfrac{\pi}{8} + \pi n$, где $n \in Z$, см. рисунок 2, получим, что в указанный промежуток попадают корни: $\dfrac{\pi}{8} - 2\pi = -\dfrac{15\pi}{8}$, $\dfrac{7\pi}{8} - 2\pi = -\dfrac{9\pi}{8}$, $\dfrac{9\pi}{8} - 2\pi = -\dfrac{7\pi}{8}$.

Ответ: а) $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $x = \pm\dfrac{\pi}{8} + \pi n$, где $n \in Z$;

б) $-\dfrac{11\pi}{6}, -\dfrac{7\pi}{6}, -\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{15\pi}{8}, -\dfrac{9\pi}{8}, -\dfrac{7\pi}{8}$.

14. Дана пирамида $SABC$, в которой $AB = AC = SB = SC = 17$, $BC = SA = 16$. Точки M и N — середины рёбер BC и SA.

а) Докажите, что отрезок MN является общим перпендикуляром к прямым BC и SA.

б) Найдите объём пирамиды $ABMN$.

Решение.

а) Так как отрезки SM и AM — медианы в равнобедренных треугольниках SBC и ABC, проведённые к основанию BC этих треугольников, то $SM \perp BC$ и $AM \perp BC$, см. ниже рисунок 1. Таким образом, прямая BC перпендикулярна двум прямым плоскости ASM, поэтому она перпендикулярна этой плоскости и, в частности, $BC \perp MN$.

Аналогично, из равнобедренности треугольников CAS и BAS следует перпендикулярность прямой SA медианам CN и BN этих треугольников, а из перпендикулярности прямой SA к плоскости BCN следует, что $SA \perp MN$. Итак, нами доказано, что $MN \perp BC$ и $MN \perp SA$, ч.т.д.

рис. 1

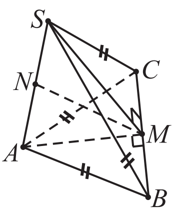
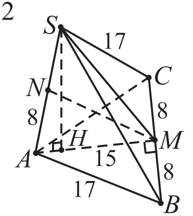


рис. 2



б) Так как N — середина SA, то расстояние d от точки N до плоскости ABC вдвое меньше, чем высота SH пирамиды $SABC$, а поскольку AM — медиана $\triangle ABC$, то площадь $\triangle ABM$ вдвое меньше площади $\triangle ABC$. Отсюда следует, что объём пирамиды $ABMN$ меньше объёма пирамиды $SABC$ в 4 раза: $V_{ABMN} = \frac{1}{3}\,d \cdot S_{ABM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{SH}{2} \cdot \frac{S_{ABC}}{2} = \frac{1}{4} V_{SABC}$.

Вычислим объём пирамиды $SABC$. В пункте а) было показано, что прямая BC перпендикулярна плоскости ASM, поэтому плоскость ABC, содержащая эту прямую, также перпендикулярна плоскости ASM. Следовательно, высота SH пирамиды лежит в плоскости ASM, т.е. является высотой к стороне AM треугольника SAM.

По теореме Пифагора из прямоугольных треугольников ABM и SBM имеем: $AM = SM = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$, см. выше рисунок 2, а из $\triangle AMN$ по теореме Пифагора находим, что $MN = \sqrt{15^2 - 8^2} = \sqrt{161}$. Высоту SH треугольника ASM найдём, выразив двумя способами площадь этого треугольника: $S_{ASM} = \frac{MN \cdot SA}{2} = \frac{SH \cdot AM}{2}$, откуда $SH = \frac{MN \cdot SA}{AM} = \frac{16\sqrt{161}}{15}$. Итак, объём пирамиды $SABC$ равен $\frac{1}{3} \cdot SH \cdot \left(\frac{1}{2}\,AM \cdot BC\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{16\sqrt{161}}{15} \cdot \frac{15 \cdot 16}{2} = \frac{128\sqrt{161}}{3}$, а искомый объём пирамиды $ABMN$ в 4 раза меньше.

Ответ: $\frac{32\sqrt{161}}{3}$

Примечание. Как видно по решению данной задачи, являющейся незначительной модификацией одной из задач реальных тестов ЕГЭ-2019, доказательство пункта а) достаточно простое и проводится буквально в несколько строк. То есть получить 1 балл за пункт а) совсем несложно. Но вот чтобы заработать ещё 1 балл за пункт б), необходимо не только привести некоторые дополнительные логические обоснования, но также безошибочно довести до конца числовые выкладки. При этом любая числовая ошибка, даже самая незначительная, даже на последнем этапе выкладок, приводит к тому, что все затраченные усилия будут оценены нулём!

Например, проведя верно все выкладки пункта б) в рассмотренной выше задаче, но забыв в спешке поделить на 4 найденный объём пирамиды $SABC$, и записав в ответ $\frac{128\sqrt{161}}{3}$ вместо $\frac{32\sqrt{161}}{3}$, выпускник получил бы за пункт б) ноль баллов, словно он к нему и не приступал!

Поэтому выпускникам, которые не являются «олимпиадниками высокого уровня» и не успевают прорешать за отведённое время все задания, а вынуждены распределять свои усилия, необходимо тщательно взвешивать свои силы. И если видно, что выкладки пункта б) достаточно громоздкие, то, возможно, не стоит тратить на них драгоценное время и запасы умственной энергии, а приступать к другому заданию.

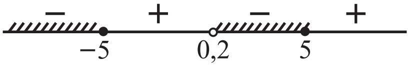
Отметим ещё, что рассмотренная выше задача далеко не самая сложная в вычислительном плане, в реальных тестах ЕГЭ были задачи, в которых вычисления существенно сложнее. По факту задание №14 уже давно перестало быть «двухбалльным» и, по идее, должно оцениваться по шкале от 0 до 3 баллов. Тогда при вычислительной ошибке в пункте б) эксперт, проверяющий работу, будет иметь возможность поставить за этот пункт 1 балл (из двух возможных). Сегодня же, при всём сочувствии к выпускнику, практически верно решившему пункт б), но допустившему совсем незначительную арифметическую ошибку, эксперт такой возможности лишён, и вынужден по критериям проверки задания оценить все усилия ученика нулём!

Тем не менее, в плане экзаменационной работы ЕГЭ-2020 задание 14 по-прежнему оценивается всего 2 баллами (по одному за каждый из пунктов), и тут уж дело каждого выпускника верно рассчитать свои силы и принять решение, а стоит ли «бороться» за 1 балл пункта б) задания 14.

15. Решите неравенство $\dfrac{100^{x^2+2x-12}-0{,}1^{3x^2-4x-101}}{0{,}04\cdot 25^{25x-4}-1}\leqslant 0.$

Решение.

Преобразуем данное в условии неравенство:
$\dfrac{10^{2x^2+4x-24}-10^{-3x^2+4x+101}}{5^{-2}\cdot 5^{2(25x-4)}-1}\leqslant 0,$ $\dfrac{10^{-3x^2+4x+101}\cdot\left(10^{5x^2-125}-1\right)}{5^{50x-10}-1}\leqslant 0,$
$\dfrac{10^{5(x^2-25)}-1}{5^{50x-10}-1}\leqslant 0,$ $\dfrac{10^{5(x-5)(x+5)}-1}{5^{50(x-0{,}2)}-1}\leqslant 0.$ Решим это неравенство методом интервалов. Знаменатель дроби обращается в нуль в точке $x=0{,}2$, а числитель обращается в нуль в точках $x=-5$ и $x=5$. Эти точки разбивают числовую ось на промежутки, внутри которых каждое из выражений $10^{5(x^2-25)}-1$ и $5^{50x-10}-1$ знакопостоянно. При $x>5$ выражение $\dfrac{10^{5(x^2-25)}-1}{5^{50x-10}-1}$ положительно, а при переходе через каждую из точек $x=5$, $x=0{,}2$ и $x=-5$ оно меняет знак на противоположный, поэтому внутри промежутков знакопостоянства его знак таков, как показано на рисунке ниже.



Ответ: $(-\infty; -5] \cup (0{,}2; 5]$

16. Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке L.

а) Докажите, что отрезки AL и BL равны.

б) Найдите длину отрезка CL, если $AC = 2$, $BC = 3$, $\angle ACB = 60^\circ$.

Решение.

а) Чтобы доказать равенство отрезков AL и BL, достаточно доказать, что $\angle ABL = \angle BAL$. Заметим, что $\angle BAL = \angle BCL$ и $\angle ALB = \angle ACB$ (как углы, опирающиеся на одни и те же дуги), см. рис. 1. Пусть $\angle ACB = \gamma$, тогда $\angle BCL = \dfrac{1}{2}(180^\circ - \gamma) = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$. Остаётся лишь заметить, что $\angle ABL = 180^\circ - \angle BAL - \angle ALB = 180^\circ - (90^\circ - \gamma/2) - \gamma = 90^\circ - \gamma/2$. Итак, $\angle BAL = 90^\circ - \gamma/2 = \angle LBA$, требуемое равенство углов доказано.

рис. 1

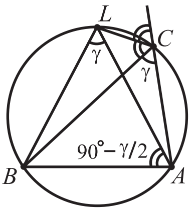
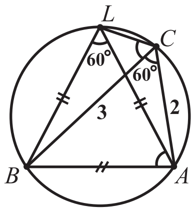


рис. 2



б) На рис. 2 отметим числовые данные задачи. Применяя теорему косинусов к $\triangle ABC$, получаем: $AB^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 7$. В пункте а) было доказано, что $AL = BL$, а так как по условию $\angle ACB = 60^\circ$, то $\angle ALB = 60^\circ$ и, значит, $\triangle ABL$ — равностороний. Поэтому $BL^2 = AB^2 = 7$.

Пусть $CL = x$. Так как $\angle BCL = \angle BAL = 60^\circ$, то по теореме косинусов из $\triangle BCL$ имеем: $x^2 + 3^2 - 2 \cdot x \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 7$, $x^2 - 3x + 2 = 0$, откуда $x = 1$ или $x = 2$, то есть $CL = 1$ или $CL = 2$.

Покажем, что $CL \neq 2$. Если предположить, что $CL = 2$, то $AC = CL$, при этом BC содержит биссектрису равнобедренного треугольника ACL и, значит, BC — серединный перпендикуляр к хорде AL. Но это означает, что BC — диаметр окружности, откуда следует, что $\angle BAC = 90^\circ$, а это невозможно, поскольку для треугольника ABC не выполняется теорема Пифагора: $BC^2 = 9$, $AC^2 + AB^2 = 11$, $BC^2 \neq AC^2 + AB^2$. Полученное противоречие показывает, что наше предположение не верно, т.е. $CL \neq 2$.

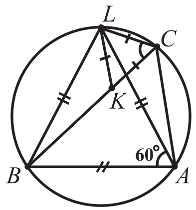
Ответ: 1

Примечание (для любителей геометрии).

Обратите внимание, что при заданных в условии длинах отрезков AC и BC искомая длина отрезка CL оказалась равна $BC - AC$ $(1 = 3 - 2)$. Данное «совпадение» отражает такой геометрический факт — если взять произвольную точку описанной окружности равностороннего треугольника и соединить её с вершинами этого треугольника, то больший из трёх полученных отрезков будет равен сумме двух других.

В нашей ситуации треугольник ABL равносторонний, точка C лежит внутри сегмента окружности, ограниченного хордой AL, поэтому из отрезков AC, BC, CL наибольшим является отрезок BC, и выполнено равенство $BC = AC + CL$.

Чтобы доказать данное равенство, отложим на отрезке BC от точки C такой отрезок CK, что $CK = CL$, см. данный ниже рисунок.



Треугольники CLK и ABL правильные, поэтому треугольники BLK и ALC равны по первому признаку равенства треугольников (объясните подробно, почему $\angle BLK = \angle ALC$). Следовательно $BK = AC$ и, значит, $BC = BK + CK = AC + CL$, что и требовалось доказать.

17. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 40 млн. рублей на некоторый срок, равный целому числу лет. Условия возврата кредита таковы:

— каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 8 млн. рублей? (Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)

Решение.

Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн. рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$40;\ \frac{40(n-1)}{n};\ \frac{40(n-2)}{n};\ldots;\ \frac{40\cdot 2}{n};\ \frac{40}{n};\ 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 15%, значит, последовательность размеров долга (в млн. рублей) в январе такова:

$$46;\ \frac{46(n-1)}{n};\ldots;\ \frac{46\cdot 2}{n};\ \frac{46}{n}.$$

Поэтому последовательность выплат будет такой:

$$\frac{46n-40(n-1)}{n};\ \frac{46(n-1)-40(n-2)}{n};\ldots;\ \frac{46\cdot 2-40}{n};\ \frac{46}{n},$$

или, после упрощений, $\frac{6n+40}{n};\ \frac{6(n-1)+40}{n};\ldots;\ \frac{6\cdot 2+40}{n};\ \frac{6\cdot 1+40}{n}$.

Наибольшая из выплат равна $\frac{6n+40}{n}$, что по условию составляет 8 млн. рублей. Значит, $\frac{6n+40}{n}=8,\ n=20$.

Подставив $n=20$ в выражение

$$\frac{(6n+40)+\big(6(n-1)+40\big)+\ldots+(6\cdot 1+40)}{n},$$

получим, что всего нужно выплатить $\frac{6\cdot(20+19+\ldots+1)+40\cdot 20}{n}=$ $=6\cdot\frac{21}{2}+40=103$ (млн рублей).

Ответ: 103 млн рублей.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\frac{x^2-2x+a}{21x^2-10ax+a^2}=0$ имеет ровно два различных корня.

Решение.

Данное в условии уравнение равносильно системе:

$$(*)\ \begin{cases} x^2-2x+a=0\\ 21x^2-10ax+a^2\neq 0. \end{cases}$$

Уравнение $x^2-2x+a=0$ имеет два различных корня $\Leftrightarrow$ дискриминант $D=4-4a$ положителен $\Leftrightarrow$ $a<1$.

Так как $21x^2-10ax+a^2=(3x-a)(7x-a)$, то при любых значениях a корнями уравнения $21x^2-10ax+a^2=0$ являются $x=\frac{a}{3}$ и $x=\frac{a}{7}$.

Система $(*)$ имеет ровно два различных решения $\Leftrightarrow$ уравнение

$x^2-2x+a=0$ имеет два различных корня и эти корни не совпадают с $x=\frac{a}{3}$ и $x=\frac{a}{7}$. Поэтому для получения ответа в задаче нужно из промежутка $(-\infty;1)$ исключить те значения a, для которых $x=\frac{a}{3}$ или $x=\frac{a}{7}$ является корнем уравнения $x^2-2x+a=0$.

Подставим поочерёдно $x=\frac{a}{3}$ и $x=\frac{a}{7}$ в уравнение $x^2-2x+a=0$:
$\frac{a^2}{9}-\frac{2a}{3}+a=0,\ a^2+3a=0,\ a(a+3)=0,\ a=0$ или $a=-3$;
$\frac{a^2}{49}-\frac{2a}{7}+a=0,\ a^2+35a=0,\ a(a+35)=0,\ a=0$ или $a=-35$.
Исключая из промежутка $(-\infty;1)$ значения $a=0$, $a=-3$ и $a=-35$, получаем ответ.

Ответ: $a\in(-\infty;-35)\cup(-35;-3)\cup(-3;0)\cup(0;1)$

19. На столе лежат 50 карточек, каждая из которых либо зелёного, либо оранжевого цвета, при этом каждого цвета есть хотя бы одна карточка. На каждой из карточек написано натуральное число, причём числа на всех зелёных карточках различны, а число на любой из оранжевых карточек меньше, чем число на любой из зелёных. Среднее арифметическое чисел на всех карточках равно 22. Если увеличить в 3 раза каждое из чисел, написанных на зелёных карточках, то среднее арифметическое всех чисел станет равно 48.

а) Может ли на столе лежать ровно 20 зелёных карточек?

б) Может ли на столе лежать ровно 20 оранжевых карточек?

в) Какое наибольшее число зелёных карточек может лежать на столе?

Решение.

Так как среднее арифметическое чисел на всех 50 карточках равно 22, то сумма чисел на всех карточках равна $50\cdot 22=1100$. Пусть z — сумма чисел на зелёных карточках, а y — сумма чисел на всех оранжевых карточках. Тогда $z+y=1100$.

После увеличения в 3 раза всех чисел, написанных на зелёных карточках, сумма чисел на всех карточках станет равна $3z+y$. А так как по условию среднее арифметическое всех 50 чисел при этом становится равно 48, то эта сумма становится равна $50\cdot 48=2400$. Значит, $3z+y=2400$.

Таким образом,

$$\begin{cases} z+y=1100\\ 3z+y=2400\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+y=1100\\ 2z=2400-1100\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+y=1100\\ z=650\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=450\\ z=650.\end{cases}$$

Заметим, что верно и обратное: если $y = 450$ и $z = 650$, то все условия задачи о среднем арифметическом чисел на карточках будут выполнены.

а) Если на столе лежит 20 зелёных карточек, то число оранжевых карточек равно 30. Чтобы сумма чисел на всех оранжевых карточках была равна 450, примем, что на всех 30 карточках написано число 15. Тогда для выполнения условий задачи числа на всех зелёных карточках должны быть не меньше 16 и различны, а их сумма должна быть равна 650. Так как $\underbrace{16+17+\ldots+34+35}_{\text{20 чисел}} = \frac{51}{2}\cdot 20 = 510 < 650$, то взяв на 19 зелёных карточках числа $\underbrace{16, 17, \ldots, 34}_{\text{19 чисел}}$, а на одной зелёной карточке число, равное $35 + (650 - 510) = 175$, мы получим, что все условия задачи выполнены.

Ответ в пункте а) – да, может: если числа на всех 30 оранжевых карточках равны 15, а на 20 зелёных карточках написаны числа $\underbrace{16, 17, \ldots, 34}_{\text{19 чисел}}, 175$, то все условия задачи выполнены.

б) Допустим, что на столе ровно 20 оранжевых карточек. Тогда среди них обязательно найдётся такая, на которой написано число, не меньшее, чем 23: в самом деле, если бы числа на всех оранжевых карточках не превосходили 22, то их сумма не превосходила бы $22 \cdot 20 = 440$, но это противоречит условию $y = 450$.

Так как на одной из оранжевых карточек написано число, не меньшее, чем 23, то число на любой из зелёных карточек не меньше 24. А поскольку числа на всех 30 зелёных карточках различны, то их сумма не меньше, чем $\underbrace{24+25+\ldots+52+53}_{\text{30 чисел}} = \frac{24+53}{2}\cdot 30 = 1155$. Но это противоречит условию $z = 650$. Следовательно, допущение о том, что на столе может лежать ровно 20 оранжевых карточек, не верно.

в) Покажем, что 23 и более зелёных карточек на столе быть не может. Если предположить, что количество зелёных карточек 23 (или больше), то количество оранжевых карточек 27 (или меньше). Поэтому найдётся оранжевая карточка, на которой написано число, не меньшее, чем $\frac{450}{27}$, то есть не меньшее 17 (иначе $y \leqslant 16\cdot 27 = 432$, что противоречит условию $y = 450$). Но тогда сумма чисел на всех зелёных карточках не меньше, чем $\underbrace{18+19+\ldots+40}_{\text{23 числа}} = \frac{58}{2}\cdot 23 = 667$, что противоречит условию $z = 650$.

Следовательно, предположение о том, что количество зелёных карточек может быть равно 23 и более, не верно.

Приведём пример, показывающий, что на столе может быть ровно 22 зелёных карточки. Если на столе лежат 21 зелёная карточка с числами $\underbrace{18, 19, \ldots, 38}_{21 \text{ число}}$ и одна зелёная карточка с числом 62, а также 26 оранжевых карточек с числом 16 и две оранжевых карточки с числом 17, то $z = 18 + 19 + \ldots + 38 + 62 = \dfrac{18+38}{2} \cdot 21 + 62 = 650$, $y = 26 \cdot 16 + 2 \cdot 17 = 450$ — при этом все условия задачи выполнены.

Таким образом, наибольшее возможное число зелёных карточек — 22.

Ответ: а) да; б) нет; в) 22.

Примечание. Решение пункта а) можно сократить очень существенно. Достаточно было бы написать: «ответ в пункте а) — да, может». А далее сразу привести вышеуказанный пример, добавив в конце: «$z = 16 + 17 + \ldots + 34 + 175 = \dfrac{16+34}{2} \cdot 19 + 175 = 650$, $y = 30 \cdot 15 = 450$, т.е. все условия задачи выполнены».

При оформлении решения на экзамене именно так и нужно делать — ограничиваться необходимым минимумом. Приведённое выше решение пункта а) содержит избыточную информацию лишь для того, чтобы показать, как можно рассуждать для построения требуемого примера.

Тест № 7

13. а) Решите уравнение $2\cos^2 x + \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение: $2 - 2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x = 0$. После замены неизвестной $\sin x = t$ получим уравнение $2t^2 - \sqrt{2}t - 2 = 0$, корнями которого являются $t = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $t = \sqrt{2}$. Значит, $\sin x = \sqrt{2}$ или $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Уравнение $\sin x = \sqrt{2}$ корней не имеет. Уравнение $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ имеет корни $x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in Z$.

б) Проведём отбор корней из серии $x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in Z$, принадлежащих отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$. Для этого на тригонометрическом кру-