
*Д.А. Мальцев,*

*А.А. Мальцев,*

*Л.И. Мальцева*

# МАТЕМАТИКА

## Подготовка к ЕГЭ 2024

## Профильный уровень

## Решебник

**Издатель Мальцев Д.А.**
**Ростов-на-Дону**

---

**Народное образование**
**Москва**
**2024**

# Содержание

# От авторов

В данном пособии приведены полные решения заданий с развёрнутым ответом для всех тестов с нечётными номерами (т.е. тестов №1, №3 и т.д.), а также решения всех заданий с нечётными номерами из Задачника книги «Математика. Подготовка к ЕГЭ 2024. Профильный уровень. Книга 2». Кроме того, в Решебнике даны указания и краткие решения к задачам №17 (планиметрия) и задачам №19 (олимпиадная тематика) тестов с чётными номерами.

Все решения написаны достаточно подробно, в стиле беседы с читателем. Отметим, что хотя на экзамене при оформлении решений требуется меньшая степень подробности, чем выбрана авторами, Вы можете «взять на вооружение» и с успехом использовать некоторые из приёмов и стиль оформления решений, которые использованы в данной книге. Например, ключевые слова и фразы, наподобие «следовательно», «значит», «таким образом», «так как ..., то...», помогут Вам более упорядоченно излагать свои мысли. И вполне возможно, что вследствие этого Вы станете совершать меньшее количество ошибок и быстрее приходить к правильному ответу.

Данное пособие поможет ученикам приобрести устойчивые навыки в решении ряда заданий и существенно повысить уровень математической культуры. А это, в свою очередь, будет способствовать не только успешной сдаче последующих экзаменов, но также окажет неоценимую помощь в дальнейшем обучении — вне зависимости от выбранного ВУЗа и специальности.

Желаем Вам успеха!

Авторы благодарят рецензентов за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

# Глава I

# Решения к тестам

*Десять страниц математики понятой лучше ста страниц, заученных на память, а одна страница, самостоятельно проработанная, лучше десяти страниц, понятых отчётливо, но пассивно.*

*Д. Юнг*

## Тест №1

**13.** а) Решите уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = 4\cos 4x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

Решение.

а) Преобразуем левую часть уравнения: $\sin^4 x + \cos^4 x =$
$=\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\cdot(2\sin x \cdot \cos x)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x.$
Воспользовавшись формулой косинуса двойного угла, преобразуем правую часть: $4\cos 4x = 4\cdot(1 - 2\sin^2 2x) = 4 - 8\sin^2 2x$. Итак, данное в условии уравнение упрощается к виду: $1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 4 - 8\sin^2 2x$,
$\frac{15}{2}\sin^2 2x = 3,\ \sin^2 2x = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \sin 2x = \pm\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Решением совокупности уравнений $\sin 2x = \frac{\sqrt{10}}{5}$ и $\sin 2x = -\frac{\sqrt{10}}{5}$ являются те $x$, для которых $2x = \pm\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5} + \pi n$, т.е.

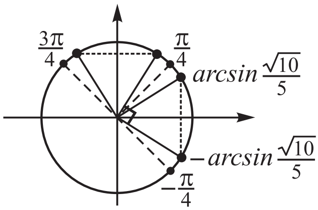
$$x = \pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5} + \frac{\pi n}{2}, \text{ где } n \in Z.$$

Поясним чуть подробнее: т.к. функция $\sin$ нечётна, то $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{10}}{5}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5}$, поэтому объединение корней из серий

$$2x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{10}}{5} + \pi n \quad \text{и} \quad 2x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{10}}{5}\right) + \pi n$$

при чётных $n$ даёт $2x = \pm\arcsin\dfrac{\sqrt{10}}{5} + \pi n$, и при нечётных $n$ также даёт $2x = \pm\arcsin\dfrac{\sqrt{10}}{5} + \pi n$.

б) Так как $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} < \arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$. Поэтому из корней данного уравнения в промежуток $\left(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right)$ попадают точки $x = \pm\arcsin\dfrac{\sqrt{10}}{5}$, а также ещё две точки, полученные из этих точек прибавлением $\dfrac{\pi}{2}$, см. данный ниже рисунок.




*Ответ:* а) $x = \pm\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{\sqrt{10}}{5} + \dfrac{\pi}{2}\cdot n$, где $n \in Z$;

б) $\pm\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ ; $\pm\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{\sqrt{10}}{5} + \dfrac{\pi}{2}$.

**14.** Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является треугольник $ABC$. На ребре $A_1B_1$ взята точка $K$, а на ребре $BC$ — точка $M$. Плоскость $AMK$ пересекает ребро $B_1C_1$ в точке $N$, при этом оказалось, что $AK = MN$.

а) Докажите, что $AB = BM$.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью $AMK$, если $AA_1 = 6$, $AB = 4$, $\angle ABC = 60^\circ$ и $A_1K : KB_1 = 1 : 3$.

Решение.

а) Основания призмы параллельны, поэтому плоскость $AMK$ пересекает их по прямым, которые параллельны друг другу. Значит, прямая $KN$ параллельна прямой $AM$.

Пусть $P$ и $Q$ — проекции точек $K$ и $N$ на рёбра $AB$ и $BC$ соответственно, см. рисунок 1. Тогда прямые $KN$ и $PQ$ параллельны и, значит, $AM$ и $PQ$ параллельны.

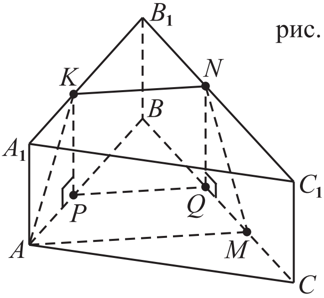



рис. 1

Так как $AK = MN$ и $KP = NQ$, то прямоугольные треугольники $AKP$ и $MNQ$ равны $\Rightarrow$ $AP = QM$. А по теореме Фалеса $\dfrac{BP}{AP} = \dfrac{BQ}{QM}$ $\Rightarrow BP = BQ$ (если две дроби равны и равны их знаменатели — $AP = QM$, то равны и их числители). Значит, $AB = AP + BP = QM + BQ = BM$, ч.т.д.

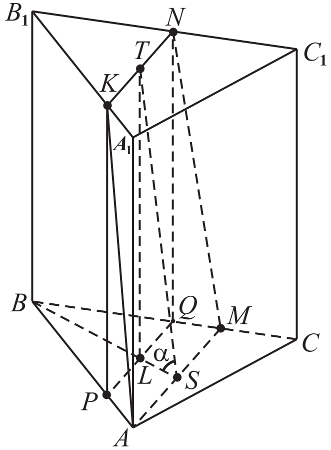
б) Так как $AB = BM$ и $\angle ABC = 60°$, то $\triangle ABM$ — правильный треугольник, и его площадь равна $S_{ABM} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$.

Так как $AP : BP = A_1K : KB_1 = 1 : 3$, то $BP = \dfrac{3}{4}AB$. Треугольники $PBQ$ и $ABM$ подобны с коэффициентом подобия $\dfrac{3}{4}$, поэтому $S_{PBQ} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 \cdot S_{ABM} = \dfrac{9}{16}S_{ABM}$. Отсюда получаем, что площадь трапеции $APQM$ равна $S_{APQM} = S_{ABM} - S_{PBQ} = \dfrac{7}{16}S_{ABM} = \dfrac{7\sqrt{3}}{4}$.

Трапеция $APQM$ является проекцией трапеции $AKNM$, поэтому искомую площадь сечения $AKNM$ можно найти, воспользовавшись формулой: $S_{APQM} = S_{AKNM} \cdot \cos\alpha$, где $\alpha$ — угол между плоскостью $AKNM$ и основанием призмы. Пусть $S$, $T$ и $L$ — середины отрезков $AM$, $KN$ и $PQ$ соответственно, см. рисунок 2. Тогда $TL = KP = AA_1$ и $BS \perp AM$ и $TS \perp AM$ $\Rightarrow$ $\angle TSL = \alpha$ — угол между плоскостью $AKM$ и основанием призмы.

Проведём вычисления: $SL = \dfrac{1}{4}BS = \dfrac{1}{4} \cdot 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{TL}{SL} = 6 : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $\sin\alpha = 4\sqrt{3}\cos\alpha$, $\cos^2\alpha + (4\sqrt{3})^2\cos^2\alpha = 1$, $49\cos^2\alpha = 1$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{7}$. Итак, $S_{AMNK} = S_{APQM} : \cos\alpha = \dfrac{7\sqrt{3}}{4} : \dfrac{1}{7} = \dfrac{49\sqrt{3}}{4}$.

рис. 2




*Ответ:* $\dfrac{49\sqrt{3}}{4}$

**15.** Решите неравенство:

$$\log_{100}\bigl((x-10)\cdot(x^2-x-90)\bigr)+1 \geqslant \lg|x-10|.$$

Решение.

Поскольку $x^2-x-90=(x-10)\cdot(x+9)$, то данное неравенство можно преобразовать равносильным образом к следующим неравенствам:

$$\log_{10^2}\bigl((x-10)^2\cdot(x+9)\bigr)+1 \geqslant \lg|x-10|,$$

$$\frac{1}{2}\lg\bigl((x-10)^2\cdot(x+9)\bigr)+1 \geqslant \lg|x-10|,$$

$$\lg\bigl((x-10)^2\cdot(x+9)\bigr)+2 \geqslant 2\lg|x-10|,$$

$$\lg\bigl((x-10)^2\bigr)+\lg(x+9)+2 \geqslant \lg\bigl((x-10)^2\bigr) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg(x+9)\geqslant -2 \\ x-10\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+9\geqslant 10^{-2} \\ x\neq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant -8{,}99 \\ x\neq 10. \end{cases}$$

*Ответ:* $[-8{,}99;10)\cup(10;+\infty)$

**16.** Вклад в размере 40 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на $x$ млн рублей, где $x$ — целое число. Найдите наименьшее значение $x$, при котором банк за четыре года начислит процентов по вкладу больше 24 млн рублей.

Решение.

В конце первого года вклад составит 44 млн рублей, а в конце второго года — 48,4 млн рублей. В начале третьего года вклад (в млн рублей) составит $48{,}4 + x$, а в конце — $53{,}24 + 1{,}1x$. В начале четвёртого года вклад составит $53{,}24 + 2{,}1x$, а в конце — $58{,}564 + 2{,}31x$.

По условию, нужно найти наименьшее целое $x$, для которого выполнено неравенство

$$(58{,}564 + 2{,}31x) - 40 - 2x > 24;\ \ x > 17\frac{83}{155}.$$

Наименьшее целое решение этого неравенства — число 18. Значит, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 18 млн рублей.

*Ответ:* 18

**17.** В трапеции $ABCD$ длина основания $AD$ равна сумме длин боковой стороны $AB$ и основания $BC$: $AD = AB + BC$. Биссектриса угла $A$ этой трапеции пересекает сторону $CD$ в точке $K$.

а) Докажите, что прямые $AK$ и $CD$ перпендикулярны.

б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если известно, что $AB = 10$, $AK = 9$ и $CK : DK = 2 : 3$.

Решение.

а) Возьмём на основании $AD$ точку $Q$ так, что $AQ = AB$. Тогда $AK$ — биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника и, значит, $AK \perp BQ$, см. рисунок 1.

Так как $AD = AB + BC$ (по условию) и $AD = AQ + QD = AB + QD$ (по построению), то $BC = QD$. Отрезки $BC$ и $QD$ параллельны и равны $\Rightarrow$ $BCDQ$ — параллелограмм $\Rightarrow$ прямая $CD$ параллельна прямой $BQ$, которая перпендикулярна $AK$. Значит, $CD \perp AK$, ч.т.д.

б) Пусть $L$ — точка пересечения прямой $AK$ с прямой $BC$, см. рисунок 2. Тогда $\angle LAD = \angle ALB$ (как вертикальные при параллельных прямых) $\Rightarrow$ $\angle LAD = \angle BAL$ (т.к. $AL$ — биссектриса $\angle BAD$) $\Rightarrow$ $\triangle ABL$ — равнобедренный, $AB = BL$.

рис. 1

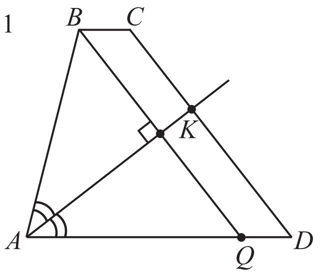
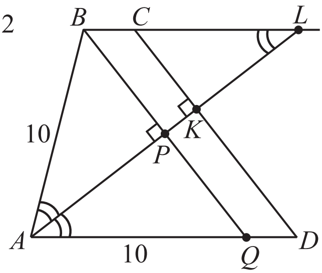



рис. 2




Треугольники $LCK$ и $ADK$ подобны $\Rightarrow \dfrac{KL}{AK} = \dfrac{CK}{DK} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow$ $\Rightarrow KL = \dfrac{2}{3}AK = 6 \Rightarrow AL = AK + KL = 9 + 6 = 15$. Пусть $P$ — точка пересечения отрезков $BQ$ и $AK$, см. рисунок 2. Тогда $BP$ — высота к основанию равнобедренного треугольника $ABL$ и, значит, его медиана, т.е. $AP = \dfrac{1}{2}AL = \dfrac{15}{2}$.

Чтобы вычислить искомую площадь трапеции $ABCD$, заметим, что она равна сумме площадей $\triangle ABQ$ и параллелограмма $BCDQ$, причём

$$S_{ABQ} = \frac{1}{2}BQ \cdot AP = BP \cdot AP, \; S_{BCDQ} = BQ \cdot PK = 2BP \cdot PK.$$

Проведём вычисления. Из прямоугольного треугольника $ABP$ находим: $BP^2 = AB^2 - AP^2 = 100 - \left(\dfrac{15}{2}\right)^2 = \dfrac{175}{4}$, $BP = \dfrac{\sqrt{175}}{2} = \dfrac{5\sqrt{7}}{2}$. Отсюда $S_{ABQ} = BP \cdot AP = \dfrac{5\sqrt{7}}{2} \cdot \dfrac{15}{2} = \dfrac{75\sqrt{7}}{4}$. Далее, $PK = AK - AP =$ $= 9 - \dfrac{15}{2} = \dfrac{3}{2}$, $S_{BCDQ} = 2BP \cdot PK = 2 \cdot \dfrac{5\sqrt{7}}{2} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{30\sqrt{7}}{4}$.

Итак, $S_{ABCD} = S_{ABQ} + S_{BCDQ} = \dfrac{75\sqrt{7}}{4} + \dfrac{30\sqrt{7}}{4} = \dfrac{105\sqrt{7}}{4}$.

*Ответ:* $\dfrac{105\sqrt{7}}{4}$

**18.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \left(x^2 - 12x + 12 - y\right) \cdot \sqrt{x - y + 12} = 0 \\ y = ax + 2a \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

Решение.

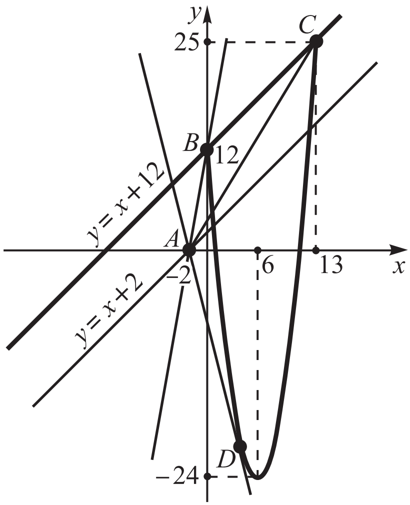
Данную задачу будем решать графически.

1) Первое уравнение системы равносильно совокупности уравнения

$$x - y + 12 = 0 \ (1)$$

и системы $\begin{cases} x^2 - 12x + 12 - y = 0 \\ x - y + 12 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 12x + 12 \\ y \leqslant x + 12 \end{cases}$ (2).

Поэтому решением первого уравнения данной в условии системы является множество точек $M$, получаемое объединением всех точек прямой $y = x + 12$ и тех точек параболы $y = x^2 - 12x + 12$, которые расположены ниже этой прямой. На рисунке это множество $M$ выделено жирной линией.




2) Уравнение $y = a(x + 2)$ при любом значении $a$ задаёт прямую, проходящую через точку $A(-2; 0)$ *(множество всех таких прямых, если к нему добавить прямую $x = 2$, образует так называемый «пучок прямых», проходящий через точку $A$)*. Искомыми значениями $a$ являются те, при которых прямая $y = a(x + 2)$ имеет ровно две общие точки с множеством $M$, указанным в пункте 1).

3) Так как уравнение $x^2 - 12x + 12 = x + 12$ имеет корни $x = 0$ и $x = 13$, то парабола $y = x^2 - 12x + 12$ и прямая $y = x + 12$ пересекаются в точках $B(0; 12)$ и $C(13; 25)$.

Угловой коэффициент прямой $AC$ равен $\dfrac{25 - 0}{13 - (-2)} = \dfrac{25}{15} = \dfrac{5}{3}$,

угловой коэффициент прямой $AB$ равен $\dfrac{12 - 0}{0 - (-2)} = \dfrac{12}{2} = 6$.

Любая из прямых $y = a(x+2)$, заключённая между прямой $AC$ (включая $AC$) и прямой $AB$ (не включая $AB$) имеет ровно две общие точки с множеством $M$. Поэтому $\frac{5}{3} \leqslant a < 6$ входят в число искомых.

Если $a > 6$, то прямая $y = a(x+2)$ пересекает параболу в точках, расположенных выше точки $B$. Поэтому при $a \geqslant 6$ прямая $y = a(x+2)$ имеет только одну общую точку с множеством $M$ (при $a = 6$ это точка $B$), т.е. значения $a \geqslant 6$ не входят в число искомых.

Также две общие точки с множеством $M$ прямая вида $y = a(x+2)$ будет иметь в том случае, когда она параллельна прямой $y = x+12$, т.е. при $a = 1$, и в том случае, когда она касается параболы $y = x^2 - 12x + 12$ — прямая $AD$ на приведённом выше рисунке. Пусть $a_0$ — угловой коэффициент прямой $AD$. Тогда для всех $a$ из множества $\{a_0 < a < \frac{5}{3},\ a \neq 1\}$ прямая $y = a(x+2)$ содержится внутри угла $CAD$ и не параллельна прямой $y = x+12$. Любая такая прямая имеет три общие точки с множеством $M$: одну общую точку с прямой $y = x+12$ и две точки — с частью параболы $y = x^2 - 12x + 12$, лежащей ниже этой прямой. Поэтому значения $a_0 < a < \frac{5}{3}$ при $a \neq 1$ не являются искомыми.

Если же $a < a_0$, то прямая $y = a(x+2)$ либо вообще не имеет общих точек с параболой $y = x^2 - 12x + 12$, либо общие точки этой прямой и параболы расположены выше прямой $y = x + 12$, т.е. не входят в множество $M$. Поэтому все значения $a < a_0$ не входят в число искомых.

Объединяя все рассмотренные случаи, получаем, что все искомые значения $a$ — это $a \in \left[\frac{5}{3}; 6\right)$, $a = 1$ и $a = a_0$. Остаётся лишь найти $a_0$.

4) Значение углового коэффициента $a_0$ касательной $AD$ к параболе $y = x^2 - 12x + 12$ найдём из того условия, что уравнение $x^2 - 12x + 12 = a(x+2)$ имеет ровно один корень, т.е. дискриминант трёхчлена $x^2 - (12+a)x + 12 - 2a$ равен нулю. Имеем: $D = (12+a)^2 - 4(12-2a) = a^2 + 32a + 96$. Корнями уравнения $a^2 + 32a + 96 = 0$ являются $a = -16 \pm 4\sqrt{10}$. Касательной $AD$ соответствует значение $a = -16 + 4\sqrt{10}$. А при $a = -16 - 4\sqrt{10}$ точка касания прямой $y = a(x+2)$ и параболы $y = x^2 - 12x + 12$ расположена выше прямой $y = x + 12$.

Итак, $a_0 = -16 + 4\sqrt{10}$.

*Ответ:* $a = -16 + 4\sqrt{10}$; $a = 1$; $a \in \left[\frac{5}{3}; 6\right)$

**19.** Из пары натуральных чисел $(a;b)$, где $a>b$, за один ход получают пару $(a+b;a-b)$.

а) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(255;2)$ пару, в которой меньшее число равно $2024$?

б) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(255;2)$ пару, в которой большее число равно $8480$?

в) При каком наименьшем значении $a$ можно за несколько ходов получить из пары $(a;b)$ пару, большее число которой равно $8480$?

Решение.

а) Так как $(a+b)+(a-b)=2a$, $(a+b)-(a-b)=2b$, то из пары чисел $(a;b)$ на 2-ом ходе получается пара $(2a;2b)$.

Пара $(a+b;a-b)$, полученная после 1-го хода, ещё через два хода также удвоится, т.е. после 3-го хода получится пара $\big(2(a+b);2(a-b)\big)$.

Заметим, что $2024=2^3\cdot 253$, а после 1-го хода из пары $(255;2)$ будет получена пара $(257;253)$, меньшее число в которой как раз равно $253$. И поскольку через каждые два хода оба числа пары удваиваются, то через шесть ходов оба числа пары $(257;253)$ увеличатся в $2^3$ раз, т.е. будет получена пара $(257\cdot 8;253\cdot 8)$. Итак, из пары $(255;2)$ на 7-ом ходе будет получена пара $(2056;2024)$.

б) После 1-го хода из пары $(255;2)$ получается пара $(257;253)$. А так как после каждых двух ходов оба числа пары удваиваются, то из пары $(255;2)$ будут получаться лишь пары вида $(255\cdot 2^n;2\cdot 2^n)$ — после $2n$ ходов, и пары вида $(257\cdot 2^n;253\cdot 2^n)$ — после $(2n+1)$ хода.

Выделяя степень 2 из числа $8480$ (последовательным делением на $2$), получим: $8480=265\cdot 2^5$. И поскольку равенства $255\cdot 2^n=265\cdot 2^5$ и $257\cdot 2^n=265\cdot 2^5$ не могут быть выполнены ни при каком натуральном $n$, то из пары $(255;2)$ нельзя получить пару, большее число которой равно $8480$.

в) Как показано выше (см. пункты а и б) из пары $(a;b)$ за $2n$ ходов будет получаться пара $(2^n\cdot a;2^n\cdot b)$, а за $(2n+1)$ ход будет получаться пара $\big(2^n\cdot(a+b);2^n\cdot(a-b)\big)$. Пусть $(a;b)$ — одна из пар, приводящая за несколько ходов к паре, в которой большее число равно $8480$. Снова воспользуемся тем, что $8480=2^5\cdot 265$. Отсюда получаем, что возможны два случая:

1) $2^n\cdot a=2^5\cdot 265 \Leftrightarrow n=5,\ a=265$ — если было сделано $2\cdot 5=10$ ходов;

2) $2^n \cdot (a+b) = 2^5 \cdot 265 \Leftrightarrow n=5,\ a+b=265$ —
если было сделано $2\cdot 5+1=11$ ходов.

Так как $a>b$, то из равенства $a+b=265$ следует, что $a \geqslant 133$. И поскольку из пары $(133; 132)$ за $11$ ходов получается пара $(265\cdot 2^5; 2^5) = (8480; 32)$, то искомое наименьшее значение числа $a$ равно $133$.

*Ответ:* а) да; б) нет; в) $133$.

## Тест № 3

**13.** а) Решите уравнение $3^{2-\cos x} = 3 + \log_3\left(\cos\dfrac{2x}{3}\right)$.

б) Найдите число корней этого уравнения, принадлежащих отрезку $[-30; 300]$.

Решение.

а) Так как $\cos x \leqslant 1$, то $2-\cos x \geqslant 1 \Rightarrow 3^{2-\cos x} \geqslant 3$. Далее,

$$\cos\frac{2x}{3} \leqslant 1 \Rightarrow \log_3\left(\cos\frac{2x}{3}\right) \leqslant 0 \Rightarrow 3+\log_3\left(\cos\frac{2x}{3}\right) \leqslant 3.$$

Как было показано выше, левая часть уравнения не меньше $3$, а правая часть уравнения не больше $3$, причём равенства достигаются лишь тогда, когда $\cos x = 1$ и $\cos\dfrac{2x}{3} = 1$. Значит, исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos\dfrac{2x}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi n,\ n\in Z \\ \dfrac{2x}{3} = 2\pi k,\ k\in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi n,\ n\in Z \\ x = 3\pi k,\ k\in Z. \end{cases}$$

Отсюда для целых $n$ и $k$ имеем: $2\pi n = 3\pi k$, $2n = 3k \Leftrightarrow n$ кратно $3$, а $k$ кратно $2 \Leftrightarrow n = 3m,\ k = 2m$, где $m\in Z$. Таким образом, решения исходного уравнения — это $x = 6\pi m$, где $m \in Z$.

б) Произведём отбор корней, попадающих в промежуток $[-30; 300]$. $-30 \leqslant 6\pi m \leqslant 300 \Leftrightarrow -5 \leqslant \pi m \leqslant 50$. Очевидно, что $\pi m \geqslant -5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m \geqslant -1$. Из неравенства $\pi m \leqslant 50$ получим оценку $m$ сверху. Так как $3{,}14 < \pi < 3{,}15$ и $3{,}15\cdot 15 < 50$, а $3{,}14\cdot 16 > 50$, то неравенство $\pi m \leqslant 50$ выполнено при $m = 15$ и не выполнено при $m = 16$. Поэтому все корни уравнения из промежутка $[-30; 300]$ — это $x = 6\pi m$, где $-1 \leqslant m \leqslant 15$, а число этих корней равно $17$.

*Ответ:* а) $x = 6\pi m$, где $m\in Z$; б) $17$.