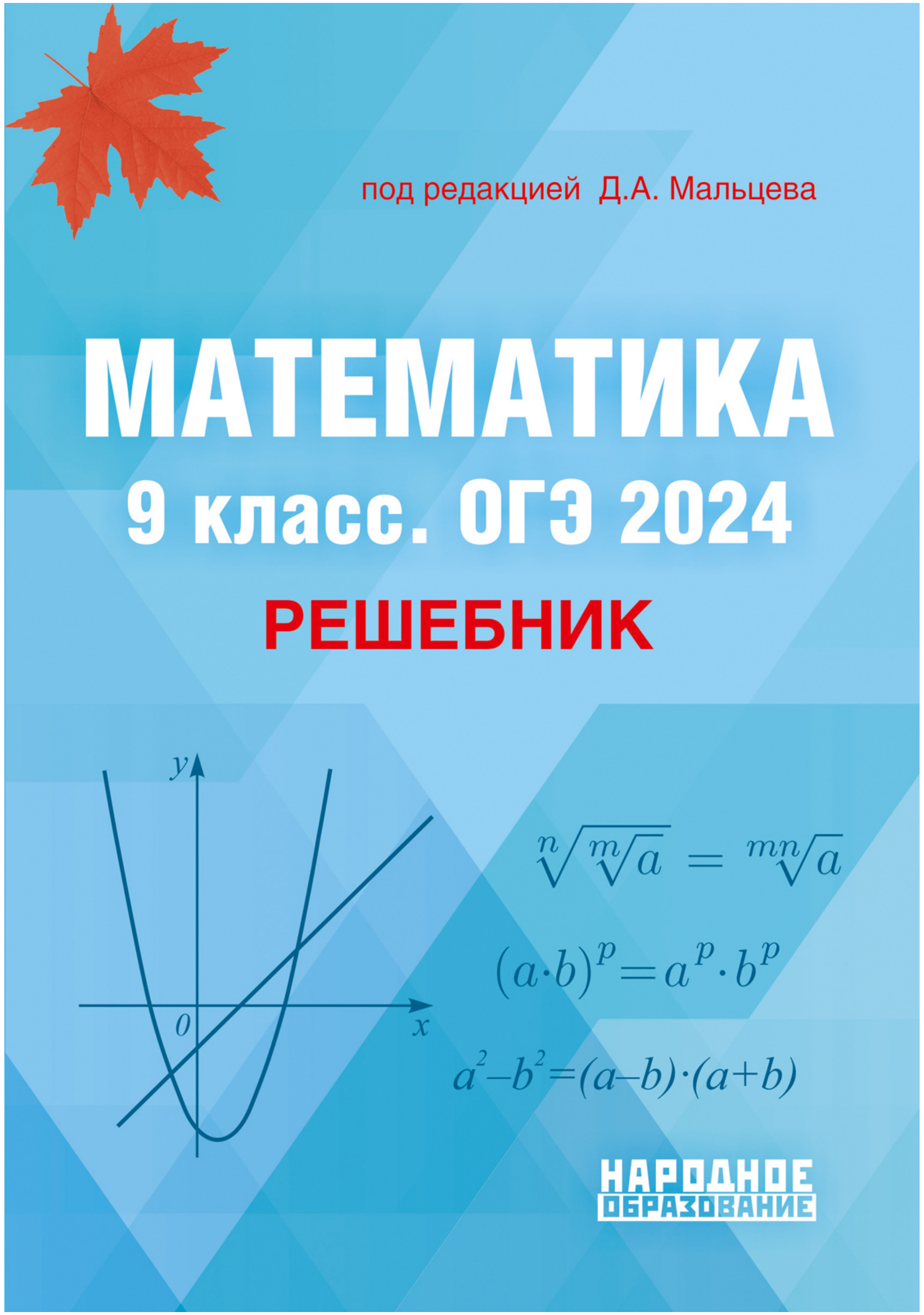


Под редакцией Д.А. Мальцева

МАТЕМАТИКА
9 класс
ОГЭ 2024
РЕШЕБНИК

✓ *решения задач части 2 тестов*

✓ *решения задач из задачника*

Издатель Мальцев Д.А.
Ростов-на-Дону

Народное образование
Москва
2024

Содержание

© издатель Мальцев Д.А., www.afina-r.ru

«Математика 9 класс. ОГЭ 2024. Решебник» под редакцией Д.А. Мальцева
© издатель Мальцев Д.А., www.afina-r.ru

От авторов

Данная книга состоит из пяти параграфов. В § 1 содержатся решения заданий второй части тестов с нечётными номерами книги «Математика. 9 класс. ОГЭ 2024». В § 2 и § 3 даны краткие решения и указания к некоторым из заданий 24 и 25 тестов с чётными номерами (краткие решения и указания даны лишь к тем заданиям, которые существенно отличаются от соответствующей задачи предшествующего теста с нечётным номером). В § 4 приведены решения всех задач с нечётными номерами из задачника этой книги. А в § 5 решения задач «геометрического тренинга» — подборки геометрических утверждений, составленных по мотивам заданий №19 тестов книги «Математика. 9 класс. ОГЭ 2024», истинность которых необходимо подтвердить или опровергнуть.

Основная цель данного пособия — помочь ученику, желающему научиться решать задания второй части выпускного экзамена по математике. Поэтому авторы старались писать решения подробно, в стиле беседы с читателем. Хотя на экзамене при оформлении решений достаточно меньшей степени подробности, чем выбрана авторами, вы вполне можете «взять на вооружение» и с успехом использовать некоторые из приёмов оформления решений, используемых в этой книге. Например, ключевые слова и фразы, наподобие «следовательно», «таким образом», «так как..., то...», помогут вам более упорядоченно излагать свои мысли. И вполне возможно, что вследствие этого вы станете совершать меньшее количество ошибок и быстрее приходить к правильному ответу.

Данное пособие поможет ученикам приобрести устойчивые навыки в решении ряда заданий и существенно повысить уровень математической культуры. Это, в свою очередь, будет способствовать не только успешной сдаче последующих экзаменов, но также окажет неоценимую помощь в дальнейшем обучении — вне зависимости от выбранного колледжа или ВУЗа и выбранной специальности.

Желаем вам успехов!

«Математика 9 класс. ОГЭ 2024. Решебник» под редакцией Д.А. Мальцева
© издатель Мальцев Д.А., www.afina-r.ru

§ 1. Решения задач учебно-тренировочных тестов

Тест №1

20 Решите уравнение $(x+11)\cdot\left(x^2-20x+100\right)=11\cdot\left(100-x^2\right)$.

Решение.

Преобразуем данное уравнение, воспользовавшись формулами сокращённого умножения «квадрат разности» и «разность квадратов»:

$$(x+11)\cdot(x-10)^2=11\cdot(10-x)\cdot(10+x).$$

При $x=10$ и левая, и правая части уравнения обращаются в нуль, поэтому $x=10$ — корень данного уравнения.

Если $x\neq 10$, то сокращая обе части уравнения на $x-10$, получаем: $(x+11)\cdot(x-10)=-11\cdot(x+10)$. Раскрывая скобки и перенося правую часть уравнения влево, приходим к такому уравнению:

$$x^2+x-110+11x+110=0,\ x^2+12x=0.$$

Корнями этого уравнения являются $x=0$ и $x=-12$.

Ответ: $-12; 0; 10$

21 Расстояние между городами А и В равно 275 км. Из города А в город В со скоростью 84 км/ч выехал первый автомобиль, а через 25 минут после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 76 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города А автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

Решение.

Первый автомобиль за 25 минут проедет расстояние, равное $84\cdot\frac{25}{60}=84\cdot\frac{5}{12}=35$ км. Поэтому когда второй автомобиль выезжает из города В, расстояние между автомобилями равно $275\,\text{км}-35\,\text{км}=240$ км. Двигаясь навстречу друг другу, автомобили сближаются со скоростью 84 км/ч $+76\,\text{км/ч}=160\,\text{км/ч}$, поэтому они встретятся через $\frac{240}{160}=1{,}5$ часа. За эти $1{,}5$ часа первый автомобиль проедет ещё $84\cdot 1{,}5=126$ км и, значит, встреча произойдёт на расстоянии $35\,\text{км}+126\,\text{км}=161\,\text{км}$ от города А.

Ответ: 161

© издатель Мальцев Д.А., www.afina-r.ru

22 Найдите все значения $a \neq 0$, при которых прямая $y = 2a - 3$ не имеет общих точек с графиком функции $y = \dfrac{2a|x| + a^2}{x^2 + 0{,}5a|x|}$ и постройте график этой функции при наименьшем из найденных значений a.

Решение.

Преобразуем выражение, определяющее данную в условии функцию:

$$\frac{2a|x| + a^2}{x^2 + 0{,}5a|x|} = \frac{a \cdot (2|x| + a)}{0{,}5|x| \cdot (2|x| + a)}.$$

Рассмотрим отдельно случаи $a > 0$ и $a < 0$.

1) Если $a > 0$, то $2|x| + a \neq 0$. Сокращая числитель и знаменатель на $2|x| + a$, получаем, что график данной в условии функции совпадает с графиком $y = \dfrac{2a}{|x|}$. Поэтому при $a > 0$ график данной функции имеет вид, изображённый ниже на рисунке 1. Прямая вида $y = b$ пересекает этот график в двух точках при любом $b > 0$ и не имеет с ним общих точек при $b \leqslant 0$. Значит, среди $a > 0$ искомыми являются те, для которых $2a - 3 \leqslant 0$, т.е. $0 < a \leqslant 1{,}5$.

рис.1

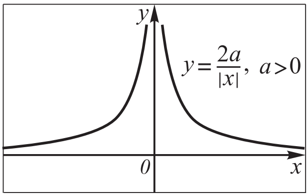
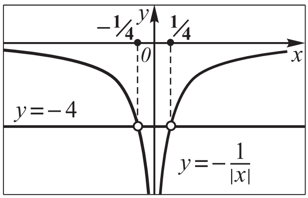


рис.2



2) Если $a < 0$, то $2|x| + a = 0$ при $x = \pm\dfrac{a}{2}$. В этом случае графиком данной в условии функции является график $y = \dfrac{2a}{|x|}$ с двумя выколотыми точками: $x_1 = \dfrac{a}{2}$, $y_1 = \dfrac{2a}{|a|/2} = -4$ и $x_2 = -\dfrac{a}{2}$, $y_2 = -4$. Прямая $y = 2a - 3$ не имеет общих точек с этим графиком $\Leftrightarrow$ $2a - 3 = -4$, $a = -0{,}5$.

Итак, все искомые a — это $a = -0{,}5$ и $a \in (0; 1{,}5]$, наименьшим из которых является $a = -0{,}5$.

График данной в условии функции при $a = -0{,}5$ изображён выше на рисунке 2.

Ответ: $a = -0{,}5$; $a \in (0; 1{,}5]$

© издатель Мальцев Д.А., www.afina-r.ru

23 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC биссектриса угла B пересекает боковую сторону AC в точке D. При этом оказалось, что $BD = BC$. Найдите величину угла (в градусах) при вершине A этого треугольника.

Решение.

Пусть $\angle ABD = \beta$. Так как BD — биссектриса угла ABC, то $\angle ABC = 2\beta$. А поскольку треугольники ABC и BCD — равнобедренные, с основаниями BC и CD соответственно, то $\angle BCD = \angle ABC = 2\beta$ и $\angle BDC = \angle BCD = 2\beta$, см. ниже рисунок 1.

рис.1

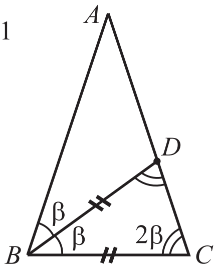
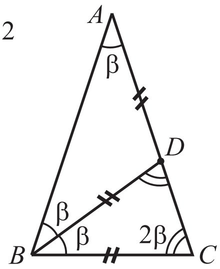


рис.2



Угол BDC является внешним углом треугольника ABD при вершине D, поэтому $\angle BAD + \angle ABD = \angle BDC$. Отсюда имеем: $\angle BAD + \beta = 2\beta$, $\angle BAD = \beta$.

Таким образом, мы выразили через β все углы треугольника ABC : $\angle ABC = \angle ACB = 2\beta$, $\angle BAC = \beta$. А поскольку сумма углов треугольника равна 180°, то $2\beta + 2\beta + \beta = 180^\circ$, $\beta = 36^\circ$. Итак, $\angle BAC = 36^\circ$.

Ответ: 36

Примечание (для любителей геометрии). Попутно нами было установлено, что равнобедренный треугольник с углом 36° при вершине обладает следующим «красивым свойством»: длина биссектрисы, проведённой из вершины при основании, равна основанию и равна большему из отрезков, на которые биссектриса делит боковую сторону, см. выше рисунок 2.

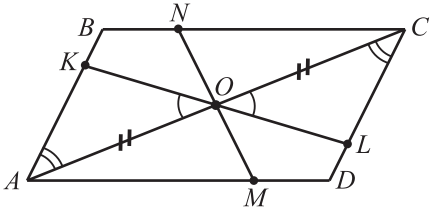
24 Точка O — середина диагонали AC параллелограмма $ABCD$. Через точку O проведены две прямые, первая из которых пересекает стороны AB и CD в точках K и L, а вторая пересекает стороны AD и BC в точках M и N, см. рисунок. Докажите, что четырёхугольник $KNLM$ — параллелограмм.

Решение.

Заметим, что $\angle KAO = \angle LCO$ — как накрест лежащие при параллель-

© издатель Мальцев Д.А., www.afina-r.ru

ных прямых, $\angle AOK = \angle COL$ — как вертикальные, $AO = CO$ — из условия (O — середина AC), см. рисунок.



Треугольники AOK и COL равны по второму признаку. Значит, $KO = LO$.

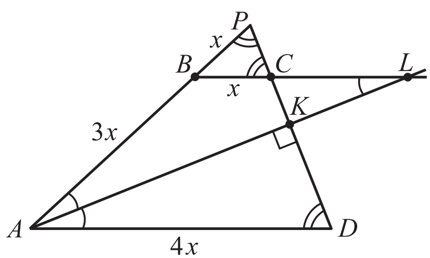
Абсолютно аналогично доказывается, что равны треугольники CON и AOM $\Rightarrow$ $MO = NO$.

Нами доказано, что диагонали KL и MN четырёхугольника $KNLM$ делятся точкой пересечения пополам. Отсюда (по известному признаку) следует, что $KNLM$ — параллелограмм, что и требовалось доказать.

25 В трапеции $ABCD$ длина основания AD в четыре раза больше длины основания BC. Биссектриса угла A этой трапеции пересекает боковую сторону CD в точке K. Найдите отношение $CK : DK$, если известно, что прямая AK перпендикулярна CD.

Решение.

Пусть $BC = x$, тогда $AD = 4x$. Продолжим прямую AK до пересечения с прямой BC в точке L, и продолжим прямую CD до пересечения с прямой AB в точке P, см. данный ниже рисунок.



Из условия имеем, что отрезок AK — биссектриса и высота треугольника ADP. Поэтому $\triangle ADP$ — равнобедренный, $AP = AD = 4x$.

Так как прямые BC и AD параллельны, то $\triangle BCP$ подобен $\triangle ADP$ и, значит, $BP = BC = x$.

© издатель Мальцев Д.А., www.afina-r.ru

Так как $AP=4x$, $BP=x$, то $AB=AP-BP=3x$. Заметим, что поскольку $\angle BLA = \angle KAD$ (как накрест лежащие при параллельных прямых), а $\angle KAD = \angle BAL$ (по условию), то $\angle BLA = \angle BAL \Rightarrow \triangle BAL$ — равнобедренный, $BL = AB = 3x$.

Так как $BL = 3x$, $BC = x$, то $CL = BL - BC = 2x$. Остаётся лишь заметить, что треугольники LCK и ADK подобны (по двум равным углам) и, значит, $CK : DK = CL : AD = 2x : 4x = 1 : 2$.

Ответ: $1 : 2$

Тест № 3

20 Решите уравнение $\dfrac{23}{x^2+10x+25} - \dfrac{2}{x^2-25} = \dfrac{5}{x+5}$.

Решение.

Преобразуем данное уравнение следующим образом:
$\dfrac{23}{(x+5)^2} - \dfrac{2}{(x-5)(x+5)} = \dfrac{5}{x+5}$, $\dfrac{23\cdot(x-5)-2\cdot(x+5)}{(x+5)^2\cdot(x-5)} = \dfrac{5}{x+5}$.
Так как $x+5\neq 0$ и $x-5\neq 0$ (знаменатель не должен обращаться в нуль), то умножая обе части уравнения на $(x+5)^2\cdot(x-5)$, получаем равносильное ему уравнение: $21x-125=5\cdot(x+5)\cdot(x-5)$, $21x-125=5\cdot(x^2-25)$, $21x-125=5x^2-125$, $5x^2-21x=0$, $5x\cdot(x-4{,}2)=0$, корнями которого являются $x=0$ и $x=4{,}2$.

Ответ: 0; 4,2

21 Из A в B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 18 км/ч, а вторую половину пути со скоростью 108 км/ч, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 60 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть S км — длина пути из A в B, v км/ч — скорость 1-го автомобиля. Тогда 1-ый автомобиль преодолел весь путь за $\dfrac{S}{v}$ часов, а 2-ой автомобиль — за $\left(\dfrac{S/2}{v-18} + \dfrac{S/2}{108}\right)$ часов. Отсюда, производя сокращение на S, получаем уравнение для нахождения v: